Puissances

Définition :

Le nombre noté a^n qui se lit « a exposant n » est le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a \times a}_{\text{n facteurs}}$$

Exemples :

$$2^5 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{5 facteurs}} = 32$$

$$3^4 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{4 facteurs}} = 81$$

$$(-2)^3 = \underbrace{(-2) \times (-2) \times (-2)}_{\text{3 facteurs}} = -8$$

Remarques :

a^2 se lit "a exposant 2" ou "a au carré"
a^3 se lit "a exposant 3" ou "a au cube"

ⓘ Ne pas confondre le signe de multiplication "×" avec le signe pour la lettre "*x*". Il faut adopter une convention d'écriture claire.

Astuce :

La règle des signes s'applique pour le calcul des puissances.

Le signe de a^n est positif si :

- a est positif
- a est négatif **et** n est pair (0, 2, 4, 6, 8, 10 …).

Le signe de a^n est négatif si : a est négatif **et** n est impair (1, 3, 5, 7, 9, 11 …).

Exemples :

4^5 est positif

$(-4)^{\mathbf{5}}$ est négatif car il y a **5** facteurs négatifs.

$(-10)^{\mathbf{8}}$ est positif car il y a **8** facteurs négatifs.

Propriété : admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.

2. On calcule les puissances.

3. On effectue les multiplications et divisions.

4. On termine toujours par les additions et soustractions.

Exemple

$4 \times 5^2 \times (5 - 4 \times 3)$

$= 4 \times 5^2 \times (5 - 12)$

$= 4 \times 5^2 \times (-7)$

$= 4 \times 25 \times (-7)$

$= 100 \times (-7)$

$= \boxed{-700}$

ⓘ Attention à la position du signe "-" dans le calcul des puissances

$(-2)^4 = 16$ car $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$

$-2^4 = -16$ car $-2^4 = -\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$

La puissance est prioritaire sur le signe "-" qui correspond à une soustraction. On calcule d'abord la puissance.

Propriété : admise

$x^a \times x^b = x^{a+b}$

Exemples :

$2^3 \times 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$

$3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$

$(-2)^4 \times (-2)^5 = (-2)^{4+5} = (-2)^9$

$5^5 \times 5^2 = 5^{5+2} = 5^7$

"Justification" :

$$2^3 \times 2^7 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3\ facteurs} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{7\ facteurs}$$

$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{3\ +\ 7\ =\ 10\ facteurs} = 2^{10}$$

Propriété : admise

$x^a \times y^a = (x \times y)^a$

Exemples

$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1000$

$3^2 \times 4^2 = (3 \times 4)^2 = 12^2 = 144$

$20^3 = (2 \times 10)^3 = 2^3 \times 10^3 = 8 \times 1000 = 8000$

"Justification

$$\begin{array}{ccccccc} 2^3 \times 5^3 & = & \boxed{2 \times 5} & \times & \boxed{2 \times 5} & \times & \boxed{2 \times 5} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & = & \boxed{10} & \times & \boxed{10} & \times & \boxed{10} \\ & = & 10^3 & & & & \end{array}$$

Propriété : admise

$(x^a)^b = x^{a \times b}$

Exemples :

$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12} = 4\,096$

$(10^3)^2 = 10^{3\times2} = 10^6 = 1\,000\,000$

$[(-3)^2]^3 = (-3)^{2\times3} = (-3)^6 = 729$

"Justification" :

$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{3\times4} = 2^{12}$

Propriété : **admise**

Si $x \neq 0$ alors $x^0 = 1$ *0^0 n'existe pas*

Exemples :

$4^0 = 1$ $(-4)^0 = 1$ $\pi^0 = 1$ $2{,}7^0 = 1$ $(-3{,}5)^0 = 1$ $-4^0 = -1$

Propriété

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Démonstration

$n + (-n) = 0$

donc $x^{n+(-n)} = x^0$

donc $x^n \times x^{-n} = 1$

donc x^n et x^{-n} sont inverses l'un de l'autre

donc $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

Exemples

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \qquad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

Propriété

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

Démonstration

$$\frac{x^a}{x^b} = x^a \div x^b = x^a \times \frac{1}{x^b} = x^a \times x^{-b} = x^{a+(-b)} = x^{a-b}$$

Exemples :

$$\frac{2^{15}}{2^7} = 2^{15-7} = 2^8 = 256$$

$$\frac{3^5}{3^{-2}} = 3^{5-(-2)} = 3^7 = 2187$$

$$\frac{5^{15}}{5^{18}} = 5^{15-18} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$\frac{10^{15}}{10^7} = 10^{15-7} = 10^8 = 100000000$$

$$\frac{10^{15}}{10^{18}} = 10^{15-18} = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Propriété : **admise**

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

Exemples :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{5^4}{3^4} = \frac{625}{81}$$

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^3 = -\frac{5^3}{3^3} = -\frac{125}{27}$$

$$\frac{40^3}{4^3} = \left(\frac{40}{4}\right)^3 = 10^3 = 1000$$

Remarque :

$10^{-3} = 0{,}001$ $10^{-2} = 0{,}01$ $10^{-1} = 0{,}1$ $10^0 = 1$ $10^1 = 10$ $10^2 = 100$ $10^3 = 1000$ $10^4 = 10000$

Propriété : admise

Soit n un entier positif.

10^n s'écrit avec un "1" suivi de n "0".

10^{-n} s'écrit "0,0…01" avec n "0" au total.

Exemples :

$10^7 = 1\underbrace{0000000}_{7\ zéros}$ $\qquad$ $10^{-8} = \underbrace{0,0000000}_{8\ zéros}1$

Définition :

Un nombre est dit sous la forme scientifique (ou en notation scientifique) s'il s'écrit sous la forme :

$a \times 10^n$

où :
- a est un nombre décimal dont la distance à zéro est supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 10 (il ne peut pas être égal à 10).
- n est un entier relatif (positif ou négatif)

Exemples de nombres n'étant pas en notation scientifique :

15	10^3	15×10^4
Il manque $\times 10^{\cdots}$	*Il manque un nombre devant*	*Le nombre devant est supérieur à 10.*

10×10^4	$0,8 \times 10^4$	$1,5 \times 10^{4,5}$
Le nombre devant n'est pas strictement inférieur à 10.	*Le nombre devant n'est pas supérieur à 1.*	*L'exposant n'est pas entier*

Exemples de nombres en notation scientifique :

1×10^4 $\quad$ $1,5 \times 10^{-5}$ $\quad$ -1×10^{42} $\quad$ $-9,5 \times 10^{11}$ $\quad$ $-3,14 \times 10^{-5}$

5×10^7 $\quad$ 4×10^{-11} $\quad$ -1×10^0

Astuces :

Si n est positif, multiplier par 10^n c'est décaler la virgule de n rangs vers la droite.

Si n est positif, multiplier par 10^{-n} c'est décaler la virgule de n rangs vers la gauche.

Exemples passage de la notation scientifique à la notation décimale.

$4,52 \times 10^4 = 45200$

$4,52 \times 10^{-4} = 0,000452$

Exemples : passage de la notation décimale à la notation scientifique.

$123,45 = 1,2345 \times 10^2$

$0,012345 = 1,2345 \times 10^{-2}$

$\underline{123,45} \times 10^5 = \underline{1,2345 \times 10^2} \times 10^5 = 1,2345 \times 10^7$

Astuce :

Pour faire un calcul avec des nombres en notation scientifique (où apparaissent uniquement des quotients ou produits), on commence par regrouper les nombres décimaux et les puissances de 10.

Exemples : de calculs avec des nombres en notation scientifique.

$12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8 = 12 \times 55 \times 10^4 \times 10^8 = \underline{660} \times 10^{12}$

$= \underline{6,6 \times 10^2} \times 10^{12} = 6,6 \times 10^{14}$

$25 \times 10^{-14} \times (-400) \times 10^{8} = 25 \times (-400) \times 10^{-14} \times 10^{8}$
$= \underline{-10000} \times 10^{-6} = \underline{-1 \times 10^{4}} \times 10^{-6} = -1 \times 10^{-2}$

$0{,}0055 \times 10^{7} \times 2 \times 10^{8} = 0{,}0055 \times 2 \times 10^{7} \times 10^{8} = \underline{0{,}011} \times 10^{15}$
$= \underline{1{,}1 \times 10^{-2}} \times 10^{15} = 1{,}1 \times 10^{13}$

$$\frac{45\times10^{23}\times24\times10^{-4}}{18\times10^{5}} = \frac{45\times24}{18}\times\frac{10^{23}\times10^{-4}}{10^{5}}$$

$$= \frac{1080}{18}\times\frac{10^{19}}{10^{5}} = 60\times10^{14} = 6\times10^{1}\times10^{14} = 6\times10^{15}$$

$$\frac{1{,}5\times10^{12}\times0{,}4\times10^{-4}}{32\times10^{-5}} = \frac{1{,}5\times0{,}4}{32}\times\frac{10^{12}\times10^{-4}}{10^{-5}}$$

$$= \frac{0{,}6}{32}\times\frac{10^{8}}{10^{-5}} = 0{,}01875\times10^{13}$$

$$= 1{,}875\times10^{-2}\times10^{13} = 1{,}875\times10^{11}$$

Utilisation de la calculatrice :

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :

$\boxed{x^{\blacksquare}}$ $\boxed{x^{y}}$ $\boxed{x^{n}}$ $\boxed{y^{x}}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\uparrow}$

Dans la suite, on nommera $\boxed{x^{\blacksquare}}$ cette touche.

Pour calculer $5^3\times 2-(2-5)^4$ on tape

5 $\boxed{x^{\blacksquare}}$ 3 × 2 - (2 - 5) $\boxed{x^{\blacksquare}}$ 4

On trouve 169.

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :

$\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ $\boxed{\times 10^{x}}$ $\boxed{\times 10^{n}}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{\text{EE}}$

Dans la suite, on nommera $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ cette touche. Elle remplace l'appui sur les touches $\boxed{\times}$ 10 $\boxed{x^{\blacksquare}}$

Pour calculer $12\times 10^4\times 55\times 10^8$ on tape

12 $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ 4 × 55 $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ 8

On trouve 6,6 $\times 10^{14}$.

ⓘ Ne pas confondre puissance et notation scientifique.

$2\times 10^5 = 200000$ et $2^5 = 32$.

Lorsque la machine affiche $\boxed{2 \quad\quad\quad {}^{5}}$, il faut comprendre (**ET ECRIRE**) 2×10^5

1°) Ecrire en notation scientifique : 725 millions, 74 milliards et 71 cent millièmes.

2°) On connaît bien ce jeu qui consiste à répondre à une série de question de plus en plus difficiles en doublant ses gains à chaque bonne réponse et en perdant tout si la réponse est mauvaise.

1re question exacte : 2 F 2e question exacte : 4 F 3e question exacte : 8 F ; etc.

a- A combien de questions un joueur a-t-il répondu s'il gagne 128 F ? 1024 F ? 32768 F ?
b- Un joueur a répondu correctement à une série de 20 questions ; combien a-t-il gagné ?

3°) Calculer : (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier) :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad \text{et} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

4°) Ecrire, sous forme d'**une seule puissance**, chaque calcul suivant :

$$\left((-3)^2\right)^{-3} \qquad 2^{-5}\times5^{-5} \qquad \frac{5^2\times5^{-4}\times5^3}{5^{-2}\times5} \qquad 2\times4\times8\times32$$

5°) La vitesse de la lumière est égale à 3×10^5 kilomètres par seconde. La vitesse du son est égale à 3×10^2 mètres par seconde.

Si tu te trouves à 3 km du lieu où tombe la foudre, combien de temps après sa formation verras-tu l'éclair ? Combien de temps après la chute de la foudre entendras-tu le « coup de tonnerre » ?

6°) Calcule : $\left(\left(\frac{3}{4}\times\frac{15}{12}\times\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{2}{5}\right)^3\div\frac{25}{4}$

7°) Recopier et compléter le tableau ci-contre :

Horizontalement :

I : $2^2\times3^2$; 10^4-1
II : Puissance cinquième de trois.
III : 12^4
IV : $\frac{5^7}{5^3}$; 5^4-10^2
V : $20^3\times10^2$
VI : $\frac{10^3}{5^2}$
VII : $10^6+8\times10^5+10^3+10^2+10^0$

Verticalement :

A : $\left(2^3\right)^5$
B : $2^2\times2^4$; $\frac{2^{15}}{2^4}$
C : $13\times5^2\times10^3$
E : $5^6\times6$
F : $\frac{2^7\times10^3}{2^2}$
G : $5^3\times3-10+9\times10^3$

	A	B	C	D	E	F	G
I			■				
II				■		■	
III		■					
IV				■			
V							■
VI	■			■	■		■
VII							

8°) Calculer :

On donnera les résultats sous la forme de fractions les plus simples possibles.

$A=2-\frac{3}{2}$ | $B=\frac{2}{5}-\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}$ | $C=\frac{9}{24}\div\frac{27}{36}$ | $D=2+\frac{4}{3}\times\frac{-1}{5}$ | $E=\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{2}{3}$ | $F=\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\right)^2$ | $G=5+\frac{11-5}{11+5}\times\frac{8}{3}$

9°) Ecrire les nombres suivants en notation scientifique :

0,0000578 230 795,15 761×10^{-4}

10°) Remplacer chaque symbole par l'entier naturel qui convient.

$3^{25}=3^8\times3^{♦}$ $(2,5)^{◆}\times(2,5)^3=(2,5)^7$ $(0,4)^{❖}\times(0,4)=(0,4)^2$ $a\times a^n\times a^{•}=a^{n+3}$

Solutions

1°) 725 millions = $7{,}25 \times 10^{8}$ 74 milliards = $7{,}4 \times 10^{10}$ 71 cent millièmes = $7{,}1 \times 10^{-4}$

2°)

Nombre de réponses exactes	4	…	7	…	10	…	15	…	20
Gain (en F)	16	…	128	…	1024	…	32768	…	1 048 576

Le gain à la question n est 2^n.

3°)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{16}=\frac{16}{16}+\frac{8}{16}+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}=\frac{32}{16}=2$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^4=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{16}{16}-\frac{8}{16}+\frac{4}{16}-\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$$

4°)

$$\left((-3)^2\right)^{-3}=(-3)^{2\times(-3)}=(-3)^{-6}$$

$$2^{-5}\times5^{-5}=(2\times5)^{-5}=10^{-5}$$

$$\frac{5^2\times5^{-4}\times5^3}{5^{-2}\times5}=\frac{5^{2+(-4)+3}}{5^{(-2)+1}}=\frac{5^1}{5^{-1}}=5^{1-(-1)}=5^2$$

$$2\times4\times8\times32=2^1\times2^2\times2^3\times2^5=2^{1+2+3+5}=2^{11}$$

5°) On verra l'éclair après $\dfrac{3}{3\times10^5}=10^{-5}$ s soit 10 microsecondes

La vitesse du son est 3×10^{2} m/s soit 3×10^{-1} km/s

On entendra le tonnerre après $\dfrac{3}{3\times10^{-1}}=10^1=10$ secondes

6°)

$$\left(\left(\frac{3}{4}\times\frac{15}{12}\times\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{2}{5}\right)^3\div\frac{25}{4}=\left(\left(\frac{3}{4}\times\frac{3\times5}{2\times2\times3}\times\frac{4\times2}{3}\right)^2\times\frac{2}{5}\right)^3\div\frac{25}{4}=\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{2}{5}\right)^3\div\frac{25}{4}=\left(\frac{5\times5}{2\times2}\times\frac{2}{5}\right)^3\div\frac{25}{4}$$

$$=\left(\frac{5}{2}\right)^3\div\frac{25}{4}=\frac{125}{8}\div\frac{25}{4}=\frac{125}{8}\times\frac{4}{25}=\frac{25\times5}{4\times2}\times\frac{4}{25}=\frac{5}{2}$$

7°)

	A	B	C	D	E	F	G
I	**3**	**6**		**9**	**9**	**9**	**9**
II	**2**	**4**	**3**		**3**		**3**
III	**7**		**2**	**0**	**7**	**3**	**6**
IV	**6**	**2**	**5**		**5**	**2**	**5**
V	**8**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
VI		**4**	**0**			**0**	
VII	**1**	**8**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**

8°)

$$A=2-\frac{3}{2}=\frac{4}{2}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$B=\frac{2}{5}-\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}-\frac{9}{10}=\frac{4}{10}-\frac{9}{10}=\frac{-5}{10}=-\frac{1}{2}$$

$$C=\frac{9}{24}\div\frac{27}{36}=\frac{9}{24}\times\frac{36}{27}=\frac{3\times3}{3\times4\times2}\times\frac{4\times9}{9\times3}=\frac{1}{2}$$

$$D=2+\frac{4}{3}\times\frac{-1}{5}=2+\frac{-4}{15}=\frac{30}{15}+\frac{-4}{15}=\frac{26}{15}$$

$$E=\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{2}{3}=\frac{5^2}{6^2}-\frac{2}{3}=\frac{25}{36}-\frac{2}{3}=\frac{25}{36}-\frac{24}{36}=\frac{1}{36}$$

$$F=\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{6}\right)^2=\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

$$G=5+\frac{11-5}{11+5}\times\frac{8}{3}=5+\frac{6}{16}\times\frac{8}{3}=5+\frac{48}{48}=5+1=6$$

9°)

$0{,}0000578 = 5{,}78 \times 10^{-5}$ 230 795,15 = $2{,}3079515 \times 10^{5}$ $761 \times 10^{-4} = 7{,}61 \times 10^{-2}$

10°) $3^{25} = 3^8 \times 3^{♦}$ $(2{,}5)^{◆} \times (2{,}5)^3 = (2{,}5)^7$ $(0{,}4)^{❖} \times (0{,}4) = (0{,}4)^2$ $a \times a^n \times a^{⬩} = a^{n+3}$

♦ = 17 ◆ = 4 ❖ = 1 ⬩ = 2