Probabilités

Exemple des pièces

On lance une pièce de monnaie. On recommence l'expérience. Voici les résultats obtenus par des élèves de 3A, 3B et 3D :

Nombre de	piles	**3807**
	faces	**3752**

Définitions

On appelle effectif total le nombre de valeurs ou expériences.

Par exemple, la série des pièces a un effectif total de 7539 car on a effectué 7539 tirages (3807+3752).

On appelle effectif de A le nombre de fois où A apparaît.

Par exemple, pour la série des pièces l'effectif de "pile" est 3807 et l'effectif de "face" est 3752.

On appelle fréquence de A le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

$$\boxed{\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}}$$

Par exemple, pour la série des pièces la fréquence de "pile" est $\frac{3807}{7539} \approx 0{,}5050$ *et la fréquence de "face" est* $\frac{3752}{7539} \approx 0{,}4950$

Remarque

Les fréquences sont souvent exprimées en pourcentage.

Méthode 1

$$0{,}5050 = \frac{50{,}50}{100} = 50{,}50\%$$

Méthode 2

3807	?
7539	100

$$? = \frac{3807 \times 100}{7539} \approx 50{,}50$$

Méthode 3

$$\text{Fréquence de A en \%} = \text{Fréquence de A} \times 100$$
$$= \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$$

$$\frac{3807}{7539} \times 100 \approx 50{,}50$$

<u>Définitions</u>

Une expérience est dite <u>aléatoire</u> si on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Les différents résultats d'une expérience sont appelés les <u>issues</u>.

<u>Exemple</u> des pièces

Les issues possibles sont "pile" ou "face". On a une chance sur deux d'obtenir une des deux issues. Elles ont la même probabilité de survenir. On dira que la probabilité d'obtenir "pile" est $\frac{1}{2}$ et que la probabilité d'obtenir "face" est $\frac{1}{2}$.

On notera p(Pile) = $\frac{1}{2}$ et p(Face) = $\frac{1}{2}$.

"p" comme probabilité

<u>Remarque</u>

Si on effectue de "nombreux" tirages, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la valeur théorique que l'on appelle probabilité.

Exemple des pièces reproduit sur ordinateur

Nombre de tirages	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	1000000
Nombre de "Pile"	2	23	46	240	494	2470	4908	24853	49914	500 557
Fréquence de "Pile" en %	20	46	46	48	49,4	49,4	49,08	49,706	49,914	50, 0557
Ecart avec la probabilité	30	4	4	2	0,6	0,6	0,92	0,294	0,086	0,0557

Exemple des dés

On tire deux dés et on effectue leur somme.
Les issues possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.
On a répété de nombreuses fois l'expérience en 3ème.
Voici les résultats de l'expérience :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Effectif	41	79	140	166	206	224	218	151	142	97	67	3815
Fréquence en %	2,68%	5,16%	9,14%	10,84%	13,46%	14,63%	14,24%	9,86%	9,27%	6,34%	4,38%	100 %

Les issues n'apparaissent pas avec la même fréquence.

Le premier dé a 6 issues possibles et le second aussi. Au total, il y a 6×6 issues possibles pour la somme ... mais certaines sont identiques :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

p(2) = p(12) = 1/36 ≈ 2,8%

p(3) = p(11) = 2/36 ≈ 5,6%

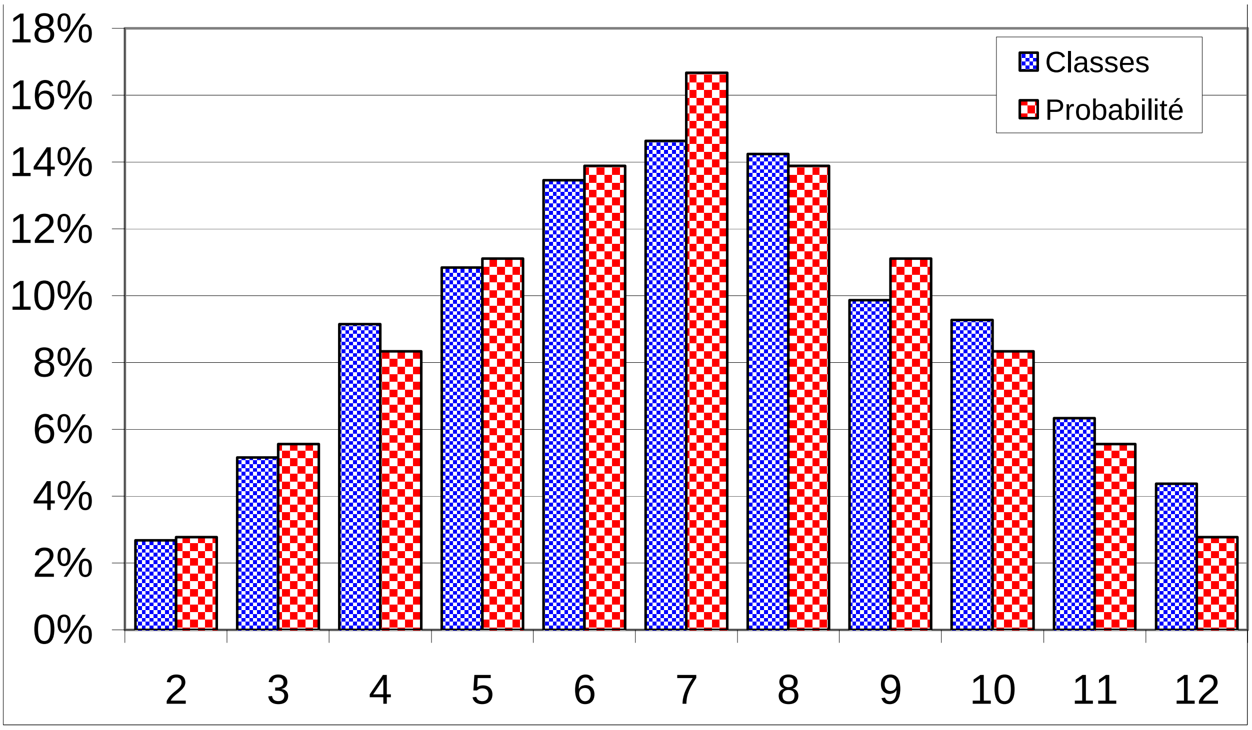
p(4) = p(10) = 3/36 ≈ 8,3 %

p(5) = p(9) = 4/36 ≈ 11,1%

p(6) = p(8) = 5/36 ≈ 13,9 %

p(7) = 6/36 ≈ 16,7%

Somme	Issues possibles	Nombre d'issues possibles	Probabilité
2	1+1	1	1/36 ≈ 2,8%
3	1+2=2+1	2	2/36 ≈ 5,6%
4	1+3=2+2=3+1	3	3/36 ≈ 8,3 %
5	1+4=2+3=3+2=4+1	4	4/36 ≈ 11,1%
6	1+5=2+4=3+3=4+2=5+1	5	5/36 ≈ 13,9%
7	1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1	6	6/36 ≈ 16,7%
8	2+6=3+5=4+4=5+3=6+2	5	5/36 ≈ 13,9%
9	3+6=4+5=5+4=6+3	4	4/36 ≈ 11,1%
10	4+6=5+5=6+4	3	3/36 ≈ 8,3%
11	5+6=6+5	2	2/36 ≈ 5,6%
12	6+6	1	1/36 ≈ 2,8%
Total		36	1


18%
16%
14%
12%
10%
8%
6%
4%
2%
0%
Classes
Probabilité
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Propriété admise

La somme des probabilités de toutes les issues possibles est toujours 1.

Définitions

Un événement est constitué de une (ou plusieurs) issue(s) d'une expérience aléatoire ; on dit qu'une de ces issues réalise l'évènement.

Deux événements sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple des dés

- Soit A l'événement "on obtient un résultat strictement inférieur à 5".

  Les issues qui réalisent cet événement sont 2, 3 et 4.

  p(A) = $\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ *On ajoute les probabilités car les issues sont incompatibles.*

- Soit B l'événement "on obtient un nombre pair".

  Les issues qui réalisent cet événement sont 2, 4, 6, 8, 10 et 12.

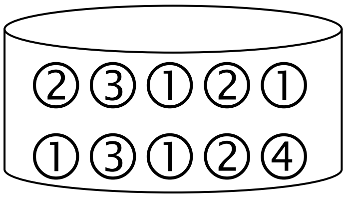
  p(B) = $\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

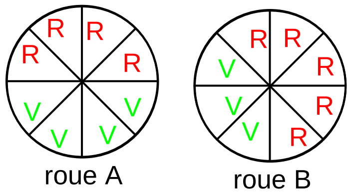
- Soit C l'événement "on obtient un nombre impair".

  Les issues qui réalisent cet événement sont 3, 5, 7, 9 et 11

  p(C) = $\frac{2}{36}+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

<u>Exemple</u> d'expérience à deux épreuves





Une urne contient des boules numérotées de 1 à 4.
On tire une boule au hasard et on lit la valeur de la boule.

Si la boule est paire, on tourne la roue A ; si la boule est impaire, on tourne la roue B. Les roues sont colorées en rouge et vert.

Dans l'urne, les issues possibles sont 1, 2, 3 ou 4.

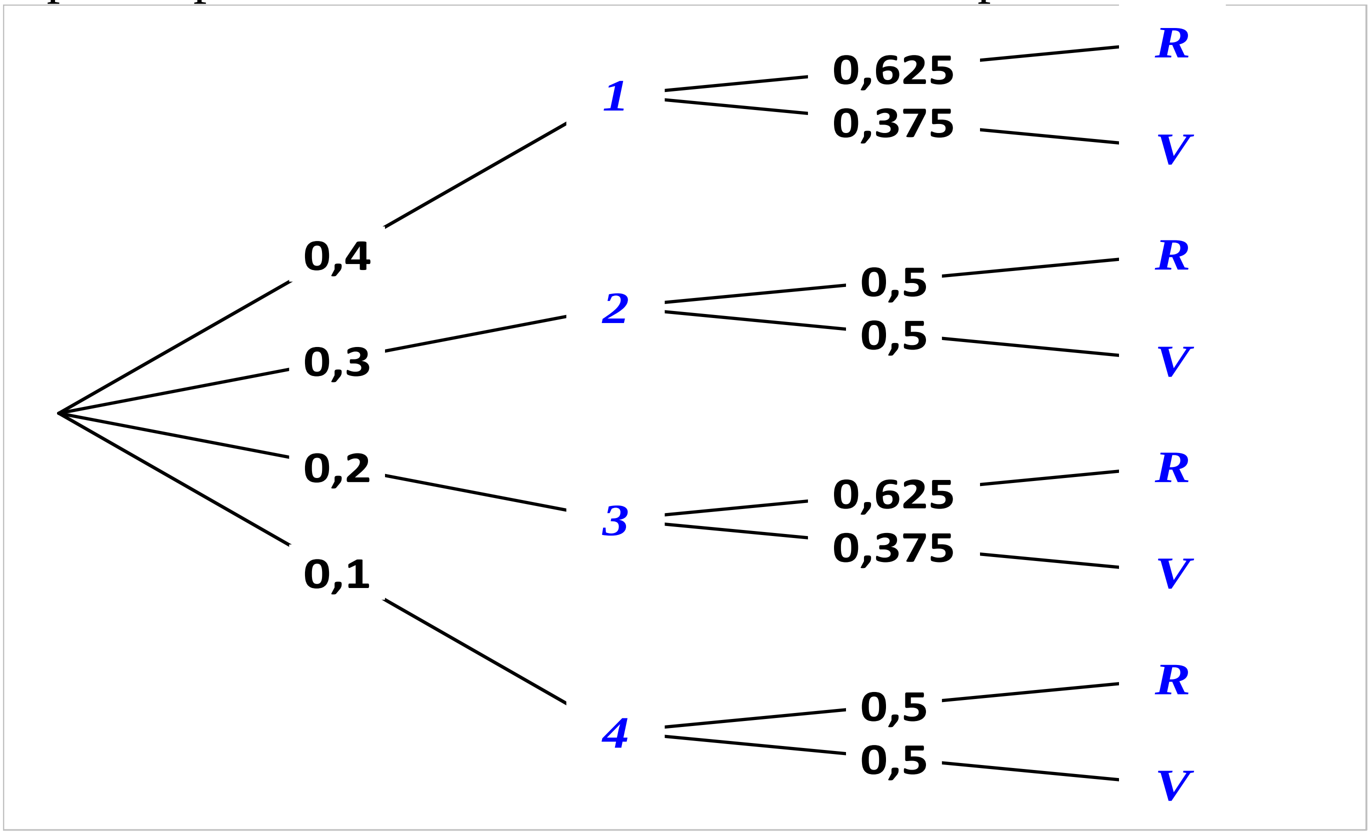
Valeur de la boule	1	2	3	4	Total
Effectif	4	3	2	1	10

On a p(1) = $\frac{4}{10}$ = 0,4 et p(2) = $\frac{3}{10}$ = 0,3 et p(3) = $\frac{2}{10}$ = 0,2 et p(4) = $\frac{1}{10}$ = 0,1.

Sur la roue A, on a p(R) = $\frac{4}{8}$ = 0,5 et p(V) = $\frac{4}{8}$ = 0,5.

Sur la roue B, on a p(R) = $\frac{5}{8}$ = 0,625 et p(V) = $\frac{3}{8}$ = 0,375.

On peut représenter l'ensemble de ces résultats par un arbre :



Définitions

Deux événements sont dits **contraires** si la somme de leur probabilité vaut 1.

Le contraire de l'événement A est noté $\overline{A}$.

Un événement est dit **certain** si sa probabilité vaut 1.

Exemple d'événements contraires

"Il pleut" et "Il ne pleut pas"

Exemple de l'expérience à deux épreuves

Soit A l'évènement "obtenir 1 et rouge".

$p(A) = 0,4 \times 0,625 = 0,25$

Soit B l'évènement "obtenir 2 et rouge".

$p(B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$

Soit C l'évènement "obtenir 3 et rouge".

$p(C) = 0,2 \times 0,625 = 0,125$

Soit D l'évènement "obtenir 4 et rouge".

$p(D) = 0,1 \times 0,5 = 0,05$

Soit R l'événement "obtenir rouge"

Comme A, B, C et D sont incompatibles,

alors $p(R) = p(A) + p(B) + p(C) + p(D)$,

donc $p(R) = 0,25 + 0,15 + 0,125 + 0,05 = 0,575$.

Soit V l'événement "obtenir vert".

V et R sont contraires donc $V = \overline{R}$

donc $p(V) = p(\overline{R}) = 1 - p(R) = 1 - 0,575 = 0,425$

Exemples de problèmes :

- On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un cœur ? un roi ? un roi de cœur ?

→ Soit A l'événement "tirer un cœur".

$$p(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Soit B l'événement "tirer un roi".

$$p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125$$

Soit C l'événement "tirer un roi de cœur".

$$p(C) = \frac{1}{32} = 0,03125$$

ou $p(C) = p(A) \times p(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = 0,03125$

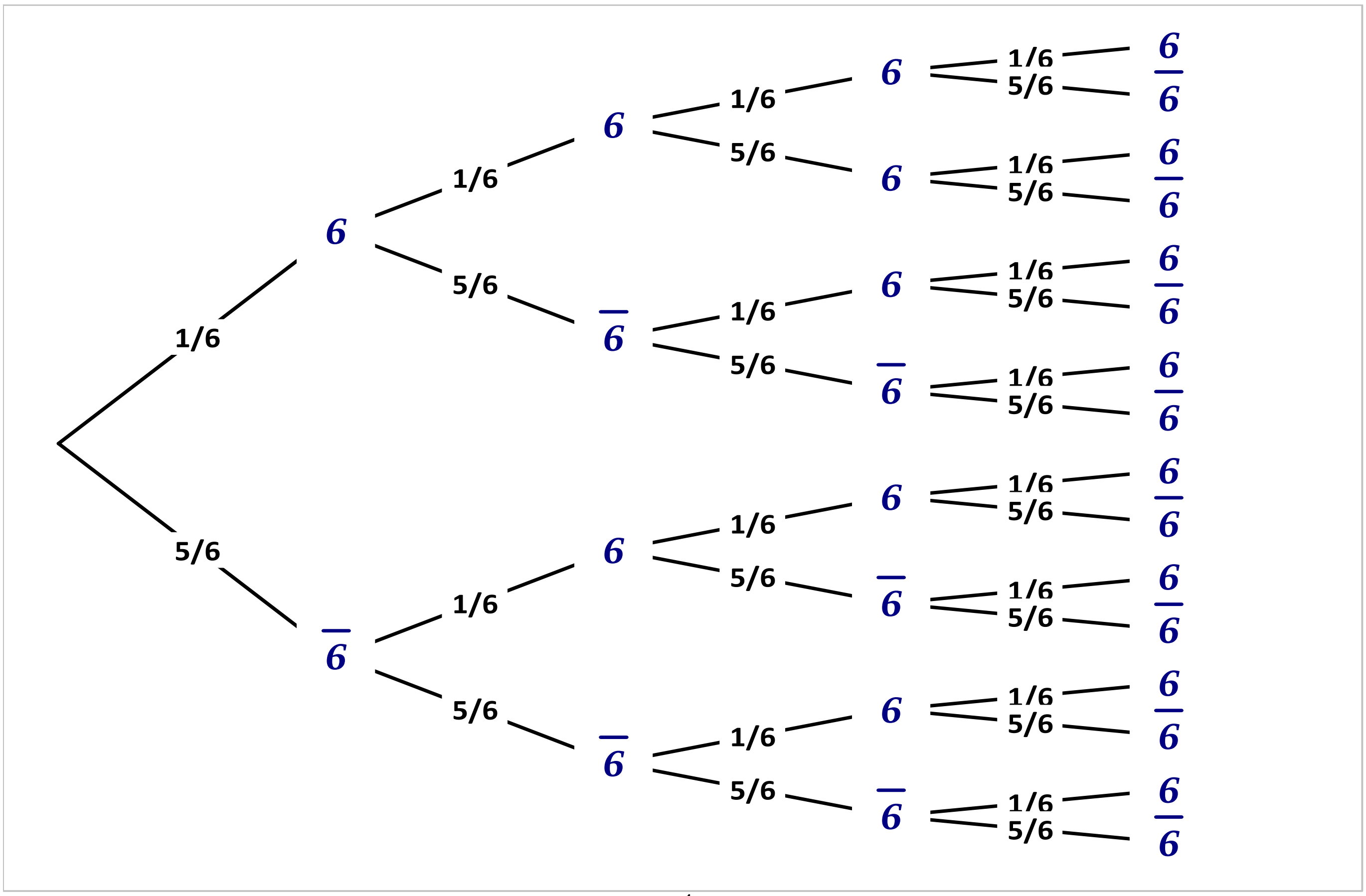
Extrait du Journal électronique d'Histoire des probabilités et de la statistique (novembre 2006)

Dans un article du mathématicien Georg Cantor écrit en 1873, on retrouve le problème dit du " pari du chevalier de Méré " qui s'opposait à tort à Fermat et à Pascal sur un sujet de probabilité contre-intuitif *:*

- *Pari 1 : Si l'on jette 4 fois un dé à six faces, il y a plus de chances qu'on obtienne un 6 plutôt qu'on n'en obtienne pas.*
- *Pari 2 : Si l'on jette 24 fois deux dés à six faces, Méré pensait qu'il y avait aussi plus de chances qu'on obtienne un double six plutôt qu'on n'en obtienne pas.*

Méré pensait que le rapport 4/6 (4 lancers, 6 possibilités) du pari 1, supérieur à ½, déterminait une probabilité supérieure à ½, et donc la probabilité plus forte d'obtenir un 6 (ou n'importe quel autre nombre) que ne pas en obtenir ; il en déduisait, dans le pari 2, en faisant intervenir le même rapport 24/36 (24 lancers, 36 possibilités) = 4/6, que la probabilité était plus forte d'obtenir un double six que ne pas en obtenir. Méré arrivait dans le pari 1 à un résultat correct avec un raisonnement incorrect ; dans le pari 2, le résultat de Méré était erroné.

On a en effet :



Pour le pari 1, une probabilité $P_1 = 1 - (5/6)^4 =$ **0, 518** ; probabilité légèrement supérieure à ½ (on a plus de chances d'obtenir un 6 que ne pas en obtenir) *Comme dans les dates d'anniversaires (chapitre 10), $(5/6)^4$ mesure la probabilité de ne pas obtenir un nombre donné, par exemple le 6, pendant quatre fois de suite.*

Pour le pari 2, une probabilité $P_2 = 1 - (35/36)^{24} =$ **0, 492** ; probabilité légèrement inférieure à ½ (on a moins de chances d'obtenir un double 6 que ne pas en obtenir)

<u>**Exemple**</u> des anniversaires

On cherche quelle est la probabilité que, au moins, deux personnes d'un groupe fêtent leur anniversaire le même jour.

On appelle A l'événement « les personnes ont des anniversaires à des jours tous différents » et B l'événement « au moins 2 personnes fêtent leur anniversaire le même jour ».

A et B sont contraires donc $p(B) = 1 - p(A)$.

Pour la 1ère personne, on a 365 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.

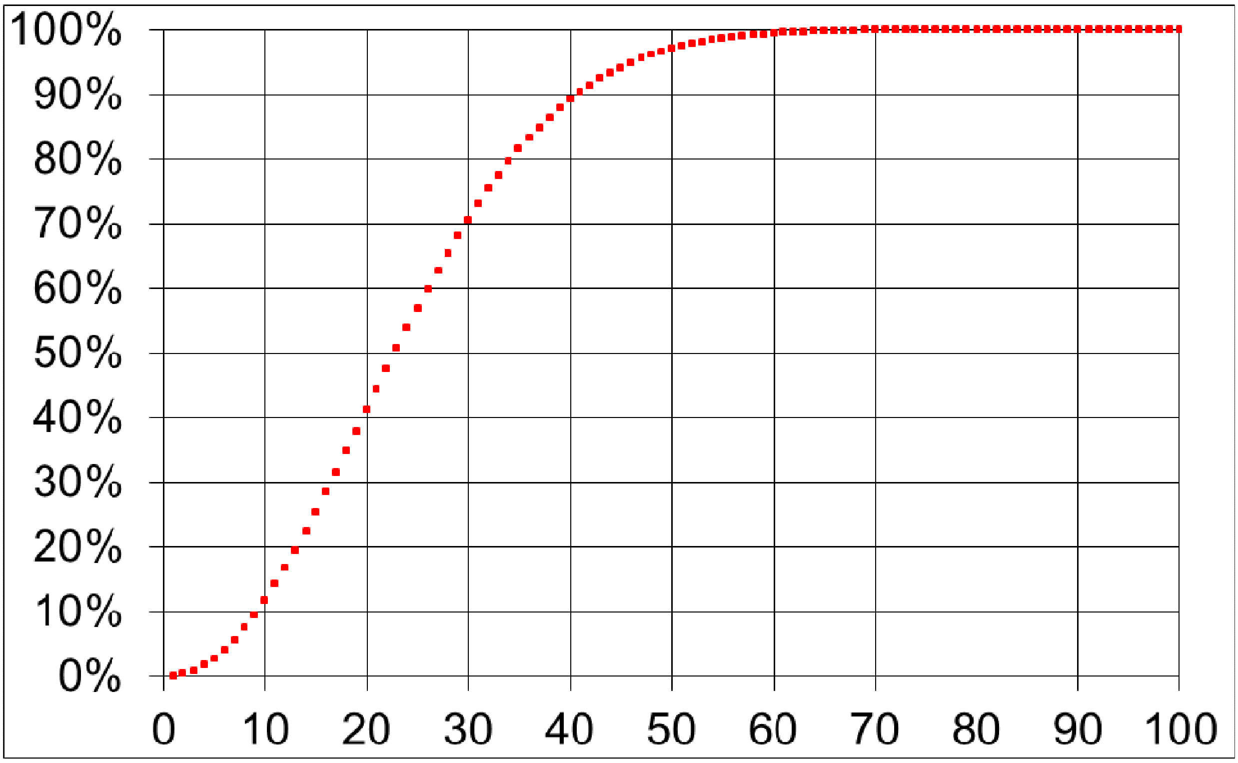
Pour la 2nde personne, on a 364 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.

Pour la 3$^{\text{ème}}$ personne, on a 363 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.

Pour la 4$^{\text{ème}}$ personne, on a 362 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.

Nombre de personnes	$p(\text{A})$	$p(\text{B})$
1	$\frac{365}{365}=1$	1-1 = 0%
2	$\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}=\frac{132860}{133225}$	$1-\frac{132860}{133225}=\frac{1}{365}\approx 0,27\%$
3	$\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}=\frac{48228180}{48627125}$	$1-\frac{48228180}{48627125}$ $=\frac{398645}{48627125}\approx 0,82\%$
4	$\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}$ $=\frac{17458601160}{17748900625}$	$1-\frac{17458601160}{17748900625}$ $=\frac{290299465}{17748900625}\approx 1,64\%$
5	97,29%	2,71%
6	95,95%	4,05%
7	94,38%	5,62%
8	92,57%	7,43%
9	90,54%	9,46%
10	88,31%	11,69%
11	85,89%	14,11%
12	83,30%	16,70%
13	80,56%	19,44%
14	77,69%	22,31%
15	74,71%	25,29%
16	71,64%	28,36%

17	68,50%	31,50%
18	65,31%	34,69%
19	62,09%	37,91%
20	58,86%	41,14%
21	55,63%	44,37%
22	52,43%	47,57%
23	49,27%	50,73%
24	46,17%	53,83%
25	43,13%	56,87%
26	40,18%	59,82%
27	37,31%	62,69%
28	34,55%	65,45%
29	31,90%	68,10%
30	29,37%	70,63%
40	10,88%	89,12%
50	2,96%	97,04%
60	0,59%	99,41%
70	0,08%	99,92%
80	0,01%	99,99%
90	0,00%	100,00%
100	0,00%	100,00%


100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100