Racines carrées

Définition

La racine carrée d'un nombre *a* **positif** est le nombre positif noté $\sqrt{\mathbf{a}}$ et qui vérifie : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Exemples

$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{0,81} = 0,9$
car $5^2 = 25$	car $6^2 = 36$	car $0,9^2 = 0,81$

⚠ On ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif.
$\sqrt{-9}$ est la racine carrée du nombre –9 qui n'existe pas car on ne peut pas trouver un nombre qui, mis au carré, donnerait –9.

Remarques

Le nombre $-\sqrt{9}$ est l'opposé de la racine carrée de 9 qui existe et donc $-\sqrt{9} = -3$ (car la racine carrée de 9 est 3 et son opposé vaut donc –3)

Pour de très nombreux nombres positifs, on ne peut pas donner une valeur exacte de la racine carrée.

$\sqrt{2} \approx 1,414$ $\qquad$ $\sqrt{11} \approx 3,317$

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble de tous les entiers naturels (les entiers positifs).

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble de tous les entiers relatifs (positifs ou négatifs, *de l'allemand Zahlen, "compter"*).

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble de tous les décimaux (qui ont une partie décimale finie).

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble de tous les nombres rationnels (les quotients).

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble de tous les nombres réels (ou irrationnels).

Exemples :

$2 \in \mathbb{N}$ $\quad -2 \notin \mathbb{N}$

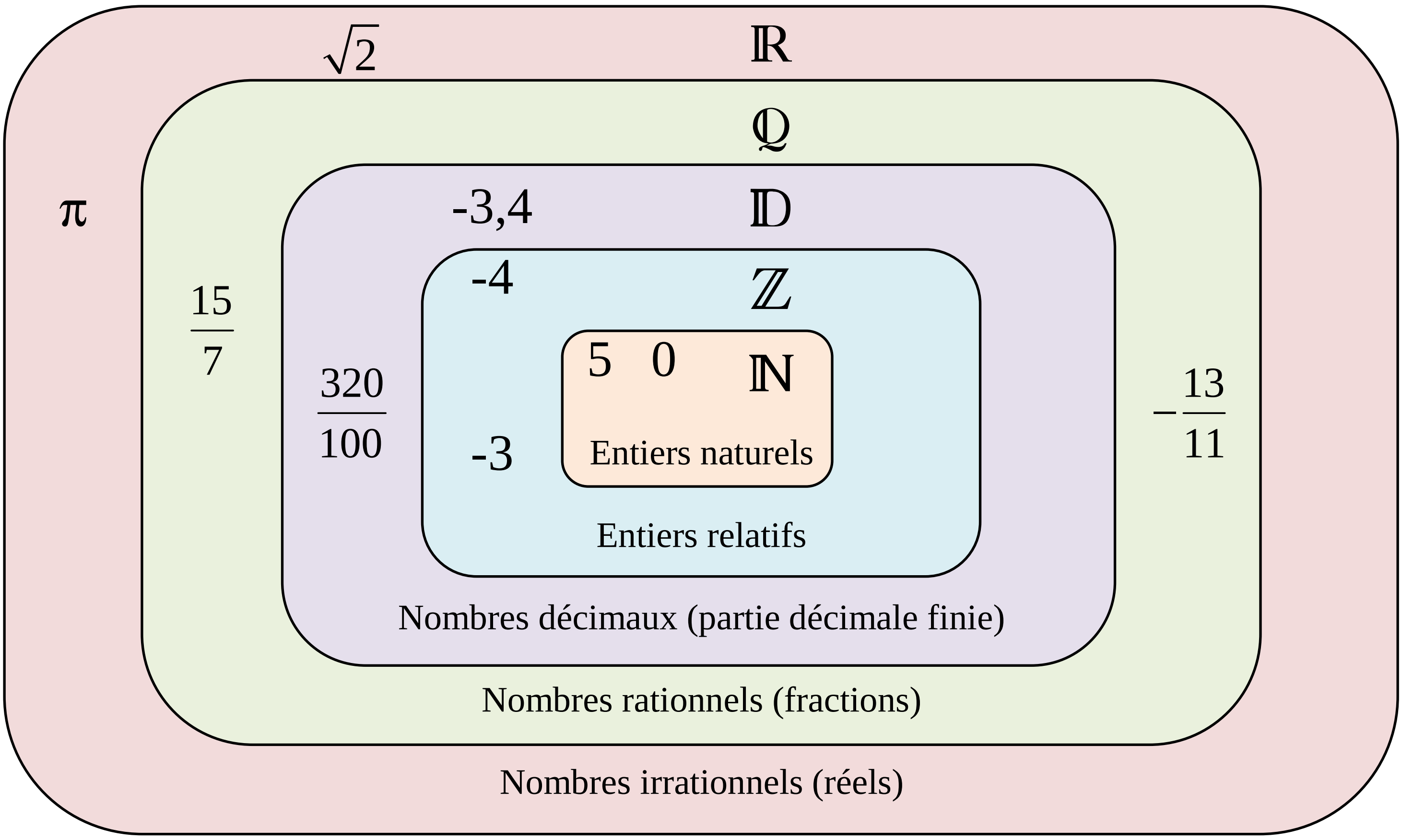
$2 \in \mathbb{Z}$ $\quad -2 \in \mathbb{Z}$ $\quad \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$

$2 \in \mathbb{D}$ $\quad -2 \in \mathbb{D}$ $\quad 1{,}17 \in \mathbb{D}$ $\quad \sqrt{2} \notin \mathbb{D}$ $\quad \pi \notin \mathbb{D}$

$2 \in \mathbb{Q}$ $\quad -2 \in \mathbb{Q}$ $\quad \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\quad \pi \notin \mathbb{Q}$

voir http://www.mathforu.com/cours-88.html

$2 \in \mathbb{R}$ $\quad -2 \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{3}{4} \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $\quad \pi \in \mathbb{R}$



	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	
5	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	
0	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	
-3	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	
3,4	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$3{,}4 = \frac{34}{10}$
$\frac{320}{10}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\frac{320}{10} = 32$
$\frac{320}{100}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\frac{320}{100} = 3{,}2$
$\sqrt{7}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	
$\sqrt{144}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{\frac{49}{25}}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$
$\sqrt{-4}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	Ne peut être ni positif, ni négatif ...

Comment déterminer si une fraction appartient à l'ensemble des décimaux ? ADMIS

On cherche à savoir si la fraction a/b appartient à $\mathbb{D}$.

On rend irréductible la fraction. On obtient une fraction c/d.

Si d est le produit de 2 ou/et de 5 uniquement alors a/b appartient à $\mathbb{D}$; sinon a/b n'appartient pas à $\mathbb{D}$.

Exemples :

$$\frac{629}{9250}=\frac{17}{250}=\frac{17}{2\times5\times5\times5}$$ appartient à $\mathbb{D}$.

On tape 250 $\boxed{\text{décomp}}$

$$\frac{108}{150}=\frac{18}{25}=\frac{18}{5\times5}$$ appartient à $\mathbb{D}$.

$$\frac{315}{56}=\frac{45}{8}=\frac{45}{2\times2\times2}$$ appartient à $\mathbb{D}$.

$$\frac{3219}{5220}=\frac{37}{60}=\frac{37}{2\times2\times3\times5}$$ n'appartient pas à $\mathbb{D}$; c'est un nombre rationnel

Propriétés admises

Soient a et b deux nombres positifs avec b non nul.

$$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b} \qquad \sqrt{a^2}=a \qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples :

$$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times8}=\sqrt{16}=4$$

$$\sqrt{7^2}=7 \qquad \sqrt{3,57^2}=3,57 \qquad \sqrt{\pi^2}=\pi$$

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$$

$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 \times \sqrt{5}^2 = 9 \times 5 = 45$$

$$\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 5^2 \times \sqrt{2}^2 = 25 \times 2 = 50$$

♥ **Remarque**

$2^2 = 4$	$8^2 = 64$
$3^2 = 9$	$9^2 = 81$
$4^2 = 16$	$10^2 = 100$
$5^2 = 25$	$11^2 = 121$
$6^2 = 36$	$12^2 = 144$
$7^2 = 49$	$13^2 = 169$

Comment simplifier une racine carrée ?

On veut simplifier $\sqrt{a}$ avec a entier positif.

1°) Ecrire a sous la forme du produit d'un carré (voir table ci-dessus) et d'un entier.

2°) "Couper" la racine carrée en utilisant la propriété $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et simplifier.

Exemples :

$$A = \sqrt{48} = \sqrt{4 \times 12} = \sqrt{4} \times \sqrt{12} = 2 \times \sqrt{12}$$
$$= 2 \times \sqrt{4 \times 3} = 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times 2 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$B=\sqrt{48}=\sqrt{16\times3}=\sqrt{16}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

$$C=\sqrt{80}=\sqrt{16\times5}=\sqrt{16}\times\sqrt{5}=4\sqrt{5}$$

$$D=\sqrt{18}+5\sqrt{50}-7\sqrt{27}$$
$$=\sqrt{9\times2}+5\sqrt{25\times2}-7\sqrt{9\times3}$$
$$=\sqrt{9}\times\sqrt{2}+5\sqrt{25}\times\sqrt{2}-7\sqrt{9}\times\sqrt{3}$$
$$=3\sqrt{2}+5\times5\sqrt{2}-7\times3\sqrt{3}$$
$$=3\sqrt{2}+25\sqrt{2}-21\sqrt{3}$$
$$=28\sqrt{2}-21\sqrt{3}$$

$$E=\left(5+2\sqrt{3}\right)^2=5^2+2\times5\times2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2=25+20\sqrt{3}+12=37+20\sqrt{3}$$

$$(a+b)^2=a^2+2\times a\times b+b^2$$

$$F=\left(8-3\sqrt{7}\right)^2=8^2-2\times8\times3\sqrt{7}+\left(3\sqrt{7}\right)^2=64-48\sqrt{7}+63=127-48\sqrt{7}$$

$$(a-b)^2=a^2-2\times a\times b+b^2$$

$$G=\left(15-\sqrt{5}\right)\left(15+\sqrt{5}\right)=15^2-\sqrt{5}^2=225-5=220$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$H=\left(\sqrt{13}-\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)=\sqrt{13}^2-\sqrt{17}^2=13-17=-4$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Exemple d'exercice :

Soit E l'expression $(2x + 3)^2 - (5x + 7)(3x - 5)$

a- Développer E.

b- Calculer E lorsque x vaut $\sqrt{3}$.

a- $E = (2x + 3)^2 - (5x + 7)(3x - 5)$

$= 4x^2 + 12x + 9 - (15x^2 - 25x + 21x - 35)$

$= 4x^2 + 12x + 9 - 15x^2 + 25x - 21x + 35$

$= -11x^2 + 16x + 44$

b- Si $x = \sqrt{3}$

alors $E = (2\sqrt{3} + 3)^2 - (5\sqrt{3} + 7)(3\sqrt{3} - 5)$

$$= \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2\times 2\sqrt{3}\times 3 + 3^2 - \left(5\sqrt{3}\times 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\times 5 + 7\times 3\sqrt{3} - 7\times 5\right)$$

$$= 12 + 12\sqrt{3} + 9 - \left(45 - 25\sqrt{3} + 21\sqrt{3} - 35\right)$$

$$= 21 + 12\sqrt{3} - \left(10 - 4\sqrt{3}\right)$$

$$= 21 + 12\sqrt{3} - 10 + 4\sqrt{3}$$

$$= 11 + 16\sqrt{3}$$

Méthode "courte" en remplaçant dans le résultat du développement :

Si $x = \sqrt{3}$

alors $E = -11\times\sqrt{3}^2 + 16\times\sqrt{3} + 44 = -11\times 3 + 16\sqrt{3} + 44 = 11 + 16\sqrt{3}$

Exemples disparitions de racines carrées au dénominateur

$$\frac{6}{\sqrt{3}} - 7\sqrt{3} = \frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} - 7\sqrt{3} = \frac{6\times\sqrt{3}}{3} - 7\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = \boxed{-5\sqrt{3}}$$

$$\frac{6}{5-\sqrt{23}}=\frac{6\left(5+\sqrt{23}\right)}{\left(5-\sqrt{23}\right)\left(5+\sqrt{23}\right)}=\frac{30+6\sqrt{23}}{5^2-\sqrt{23}^2}=\frac{30+6\sqrt{23}}{25-23}$$

$$=\frac{30+6\sqrt{23}}{2}=\boxed{15+3\sqrt{23}}$$

<u>Exercice brevet juin 2008.</u>

On donne le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre.
a) Multiplier ce nombre par 3
b) Ajouter le carré du nombre choisi.
c) Multiplier par 2.
Ecrire le résultat.

1. Montrer que, si on choisit le nombre 10, le résultat obtenu est 260.

2. Calculer la valeur exacte du résultat obtenu lorsque :

* Le nombre choisi est - 5 ;

* Le nombre choisi est $\frac{2}{3}$;

* Le nombre choisi est $\sqrt{5}$.

3. *(A faire après le chapitre sur les équations produits)* Quels nombres peut-on choisir pour que le résultat obtenu soit 0 ?

RACINES CUBIQUES

Hors programme de 3ème mais nécessaire pour la poursuite d'études en Suisse

Définition

Soit a un nombre relatif *(il peut être négatif)*.

La racine cubique du nombre a est le nombre relatif noté $\sqrt[3]{a}$ qui vérifie $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

Exemples

$\sqrt[3]{125} = 5$ car $5^3 = 125$

$\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$

$\sqrt[3]{64} = 4$ car $4^3 = 64$

Remarque

$\sqrt{-27}$ n'existe pas mais on a $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Propriétés admises

Soient a et b deux nombres relatifs et b non nul.

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$ $\qquad \sqrt[3]{a^3} = a$ $\qquad \sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ $\qquad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

♥ **Remarque**

$2^3 = 8$	$7^3 = 343$
$3^3 = 27$	$8^3 = 512$
$4^3 = 64$	$9^3 = 729$
$5^3 = 125$	$10^3 = 1000$
$6^3 = 216$	

Exemples de calcul

$$\sqrt[3]{23625} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{189} = 5 \times \sqrt[3]{189}$$

$$= 5 \times \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{7} = 5 \times 3 \times \sqrt[3]{7} = \boxed{15\sqrt[3]{7}}$$

$$11\sqrt[3]{24} - 7\sqrt[3]{375}$$

$$= 11 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} - 7 \times \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{3}$$

$$= 11 \times 2 \times \sqrt[3]{3} - 7 \times 5 \times \sqrt[3]{3}$$

$$= 22\sqrt[3]{3} - 35\sqrt[3]{3}$$

$$= \boxed{-13\sqrt[3]{3}}$$