Simulations

Définition

Une <u>simulation</u> est un problème de mathématique appliquée dans lequel on essaie de résoudre numériquement des modèles d'origine physique, biologique, économique, financier …

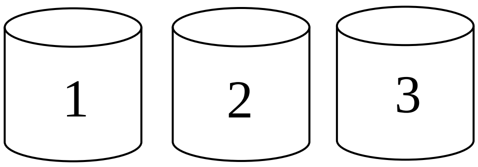
Exemple des boites

Trois boites, numérotées de 1 à 3, sont posées sur une table. Une récompense est cachée sous l'une des boites.

Dans un premier temps, je choisis une boite.

Le meneur de jeu, qui sait où se trouve la récompense, me montre ensuite une boite dans laquelle il n'y a pas la récompense et me demande si je confirme mon choix ou si je veux en changer.

Le meneur de jeu me donne ce qu'il y a dans la boite que j'ai alors choisi.



Y a-t-il une stratégie plus intéressante que l'autre ?

La première idée qui vient à l'esprit est qu'il ne reste que 2 boites et donc qu'on a autant de chance de gagner en changeant qu'en conservant son choix initial.

Nous allons simuler cette expérience avec un tableur.

Tirage aléatoire avec un tableur

=alea() retourne un nombre entre 0 inclus et 1 exclu.

=arrondi(nombre ;0) retourne l'arrondi de *nombre* avec 0 chiffre après la virgule.

=arrondi.sup(nombre ;0) retourne l'arrondi par excès de *nombre* avec 0 chiffre après la virgule.

=arrondi(alea() ;0) retourne aléatoirement 0 ou 1 avec la même probabilité.

Si je tape *=arrondi(alea()* 2 ;0)* je trouve bien 0, 1 ou 2 mais avec des probabilités différentes.
En effet, *alea()* 2* donne un nombre aléatoire entre 0 inclus et 2 exclu.

Entre 0 et 0,5 l'arrondi donnera 0.
Entre 0,5 et 1 l'arrondi donnera 1.
Entre 1 et 1,5 l'arrondi donnera aussi 1.
Entre 1,5 et 2 l'arrondi donnera 2.

On obtient $p(0)=\frac{1}{4}$ et $p(1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $p(2)=\frac{1}{4}$; il n'y a pas équiprobabilité.

Pour obtenir aléatoirement 1 ou 2, je tape
=arrondi.sup(alea() 2 ;0)* ou *= 1 + arrondi(alea() ;0)*

Pour obtenir aléatoirement 1, 2 ou 3, je tape
=arrondi.sup(alea() 3 ;0)*

Pour obtenir aléatoirement -1 ou +1, je tape
*=arrondi(alea() ;0)*2 – 1*

Pour obtenir aléatoirement 1 ou 3, je tape
*=arrondi(alea() ;0)*2 + 1*

Exemple des boites

	A	B	C	D	E
1	Position de la récompense	Choix du candidat	Le meneur de jeu montre la boite	Si je ne change pas j'ai …	Si je change, j'ai …
2	1	3	2	perdu	gagné

En A2, je veux un nombre choisi aléatoirement entre 1, 2 et 3. Je tape *=arrondi.sup(alea()* 3 ;0)*

En B2, je veux un nombre choisi aléatoirement entre 1, 2 et 3. Je tape *=arrondi.sup(alea()* 3 ;0)*

En C2 je dois déterminer une boite non choisie par la candidat et perdante.
Si le joueur n'a pas choisi la bonne boite, je remarque que la somme des numéros des boites est 6 donc je n'ai qu'à taper
= 6 – A2 – B2
Si le joueur a choisi la bonne boite, il faut choisir aléatoirement une des deux autres :

- si le joueur a choisi 1, il faut que je trouve 2 ou 3 ; je tape alors *=1 + arrondi.sup(alea()* 2 ;0)*
  ou *= 2 + arrondi(alea() ;0)*
- si le joueur a choisi 2, il faut que je trouve 1 ou 3 ; je tape alors *=arrondi(alea() ;0)*2 + 1*
- si le joueur a choisi 3, il faut que je trouve 1 ou 2 ; je tape alors *= arrondi.sup(alea()* 2 ;0)* ou *= arrondi(alea() ;0) + 1*

En C2, je tape
=si(A2<>B2 ;
  6-A2-B2 ;
  si(A2=1; *2 + arrondi(alea() ;0) ;0)*
  +si(A2=2; *arrondi(alea() ;0)*2 + 1 ;0)*
  +si(A2=3; *arrondi(alea() ;0) + 1*;0)
)

En D2 je tape =si(B2=A2;"gagné";"perdu")

En E2, je tape =si(D2= "gagné";"perdu";"gagné")

Exercice 1

1. Faire la simulation 10 fois et noter combien de fois il fallait changer ou ne pas changer.

2. Refaire la simulation 100 fois.

3. Refaire la simulation 1000 fois.

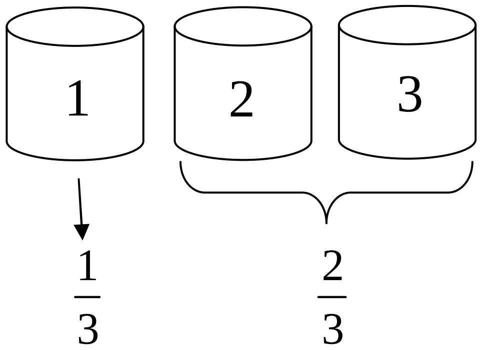
4. Que remarque-t-on ?
   Cela correspond-il à notre première idée ?
   Quelle conjecture pourrait-on faire ?

On conjecture qu'il est préférable de changer plutôt que de garder le choix initial.

Prouvons le.

Au début, il y a 1 chance sur 3 que la récompense soit dans une boite et 2 chances sur 3 qu'elle soit dans l'autre une des deux autres boites.

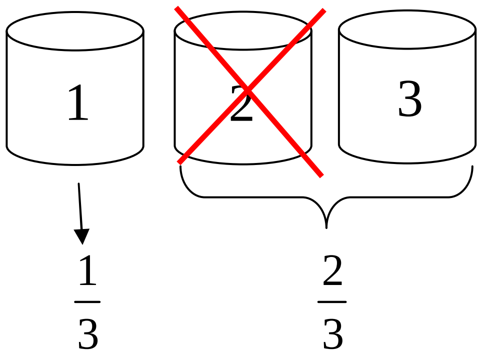
.



Si on enlève une boite, il reste 2 chances sur 3 qu'il ne soit pas dans cette boite.

Si on sait qu'il n'est pas dans une de ces deux boites, il y a toujours 2 chance sur 3 qu'elle soit dans la boite non choisie.

.



Il y a donc 2 fois plus de chance de gagner en changeant de boite.

La stratégie gagnante est donc de changer de boite à chaque fois.