Systèmes d'équations

Définition

Lorsque plusieurs équations sont vraies simultanément, on parle de système d'équations que l'on note :

$$\begin{cases} \text{Equation 1} \\ \text{Equation 2} \\ \text{Equation 3} \\ \ldots \end{cases}$$

Remarque

Les systèmes étudiés cette année auront deux équations et les équations auront (au maximum) deux inconnues et seront de degré 1.

Définition

Pour donner les solutions d'un système de deux équations à deux inconnues, on donnera des couples de nombres.

Résoudre le système c'est trouver toutes les solutions du système.

Exemple

Pour le système $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$ il y a une unique solution (2 ; 5).

On peut aussi noter S = {(2 ; 5)}

Pour le système (hors programme) $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y = 5 \end{cases}$ il y a deux solutions (3 ; 5) et (-3 ; 5).

On peut aussi noter S = {(3 ; 5) ; (-3 ; 5)}

Pour le système (hors programme) $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 25 \end{cases}$ il y a quatre solutions (3 ; 5) et (-3 ; 5) et (3 ; -5) et (-3 ; -5).

On peut aussi noter S = {(3 ; 5) ; (-3 ; 5) ; (3 ; -5) ; (-3 ; -5)}

Remarque

Les valeurs sont rangées dans l'ordre alphabétique des inconnues.

Comment résoudre un système par substitution ?

1. On isole une inconnue dans une équation.

2. On substitue (remplace) cette inconnue dans l'autre équation.

3. On obtient alors une équation à une seule inconnue que l'on résout.

4. On substitue la solution trouvée dans l'autre équation et on obtient à nouveau une équation à une seule inconnue que l'on résout.

5. On vérifie et on conclue.

Exemple 1

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x + 5y = 29 \end{cases}$$

donc $$\begin{cases} y = 10 - 2x \\ 3x + 5y = 29 \end{cases}$$

donc $$\begin{cases} y = 10 - 2x \\ 3x + 5 \times (10 - 2x) = 29 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} y = 10 - 2x \\ 3x + 50 - 10x = 29 \end{cases}$

donc $\begin{cases} y = 10 - 2x \\ -7x + 50 = 29 \end{cases}$

donc $\begin{cases} y = 10 - 2x \\ -7x = -21 \end{cases}$

donc $\begin{cases} y = 10 - 2x \\ x = 3 \end{cases}$

donc $\begin{cases} y = 10 - 2\times 3 \\ x = 3 \end{cases}$

donc $\begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases}$

Vérification

Si x = 3 et y = 4 alors 2x + y = 2×3 + 4 = 10

et 3x + 5y = 3×3 + 5×4 = 29

C'est bon

La solution de l'équation est (3 ; 4).

On peut aussi écrire

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x + 5y = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ 3x + 5y = 29 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ 3x + 5\times(10 - 2x) = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ 3x + 50 - 10x = 29 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ -7x + 50 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ -7x = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 10 - 2 \times 3 \\ x = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases}$$

La vérification est alors inutile et on peut conclure en écrivant :

S = {(3 ; 4)} ou la solution est (3 ; 4)

Exemple 2

$$\begin{cases} 2x + 3y = 31 \\ 5x + 7y = 74 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} 2x = 31 - 3y \\ 5x + 7y = 74 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = \dfrac{31-3y}{2} \\ 5x + 7y = 74 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = \dfrac{31-3y}{2} \\ 5 \times \dfrac{31-3y}{2} + 7y = 74 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = \dfrac{31-3y}{2} \\ \dfrac{155-15y}{2} + 7y = 74 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = \dfrac{31-3y}{2} \\ \dfrac{155}{2} - \dfrac{15y}{2} + 7y = 74 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = \dfrac{31-3y}{2} \\ \dfrac{155}{2} - \dfrac{1}{2}y = 74 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = \dfrac{31-3y}{2} \\ -\dfrac{1}{2}y = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = \dfrac{31-3y}{2} \\ y = 7 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = \dfrac{31-3\times 7}{2} \\ y = 7 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases}$

Vérification

Si $x = 5$ et $y = 7$ alors $2x + 3y = 2\times5 + 3\times7 = 31$

et $5x + 7y = 5\times5 + 7\times7 = 74$

C'est bon

La solution de l'équation est (5 ; 7).

Remarque

La méthode « marche » très bien mais devient complexe à cause de l'utilisation des fractions. Il est préférable d'utiliser une autre méthode.

Définition

Multiplier une équation par un nombre, c'est multiplier les deux membres par ce même nombre.

Propriété admise

On ne change pas les solutions d'un système si :

1. On multiplie une ligne par un nombre non nul.
2. On remplace une ligne par la somme (ou la différence) de deux lignes.

Comment résoudre un système par combinaison linéaire ?

1. On choisit une inconnue et on s'arrange pour en avoir le même nombre (au signe près) dans les deux équations.

2. On remplace une ligne par la somme (ou la différence) des deux lignes afin de faire « disparaître » une inconnue.

3. On résout l'équation obtenue.

4. On substitue la valeur trouvée dans l'autre équation.

5. On vérifie et on conclue.

Exemple 3

$$\begin{cases} 2x+3y=31 \\ 5x+7y=74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 5\times L_1 \\ 2\times L_2 \end{matrix} \begin{cases} 10x+15y=155 \\ 10x+14y=148 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} y = 7 \\ 10x + 14y = 148 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 7 \\ 10x + 14 \times 7 = 148 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 7 \\ 10x + 98 = 148 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 7 \\ 10x = 50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 7 \\ x = 5 \end{cases}$$

S = {(5 ; 7)}

Exemple de problème

Jules achète 3 pains au chocolat et 5 croissants. Il paye 8,05€.

Dans la même boulangerie, Adrien achète 2 pains au chocolat et 7 croissants. Il paye 8,85€.

Combien coûte un pain au chocolat ? un croissant ?

Soit *x* le prix d'un pain au chocolat et *y* le prix d'un croissant.

$$\begin{cases} 3x+5y=8,05 \\ 2x+7y=8,85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2\times L_1 \\ 3\times L_2 \end{array} \begin{cases} 6x+10y=16,10 \\ 6x+21y=26,55 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-L_1 \end{array} \begin{cases} 6x=16,10-10y \\ 11y=10,45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{16,10-10\times 0,95}{6} \\ y=0,95 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1,1 \\ y=0,95 \end{cases}$$

Donc $\boxed{\text{un pain au chocolat coûte 1,10€ et un croissant coûte 0,95€}}$.

Utilisation de la calculatrice

Pour résoudre le système $\begin{cases} 3x + 5y = 8,05 \\ 2x + 7y = 8,85 \end{cases}$, je tape

Sur CASIO FX 92	Sur TI-collège Plus
MODE 3 :system 1 :anX+bnY=cn 3 exe 5 exe 8,05 exe 2 exe 7 exe 8,85 exe exe → X = 1,1 exe → Y = 0,95 MODE 1 :comp	2nde maths 3 entrer + 5 entrer 8.05 entrer 2 entrer + 7 entrer 8.85 entrer entrer → X = 11/10 → Y = 19/20 entrer annul