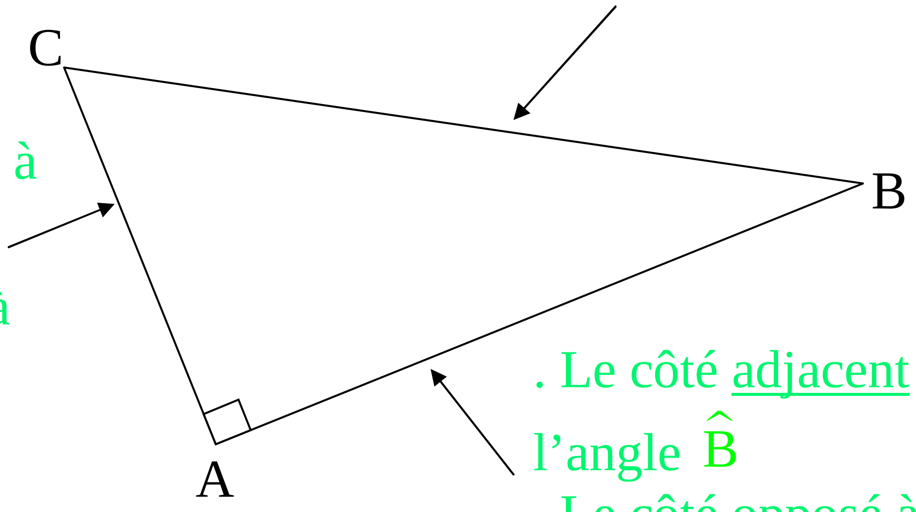
Triangles rectangles

Définitions :

L'hypoténuse

. Le côté adjacent à l'angle $\widehat{C}$
. Le côté opposé à l'angle $\widehat{B}$.



. Le côté adjacent à l'angle $\widehat{B}$
. Le côté opposé à l'angle $\widehat{C}$.

Remarque :

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté.

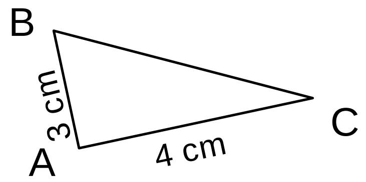
Théorème de Pythagore : admis

- Dans un triangle **rectangle**, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Soit ABC un triangle **rectangle** en A.
  Alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

⚠ Cette propriété ne s'applique **que** dans les **triangles RECTANGLES**.

Exemple 1 : recherche de l'hypoténuse.

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et AC = 4 cm.
Calculer BC.



Dans ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore,

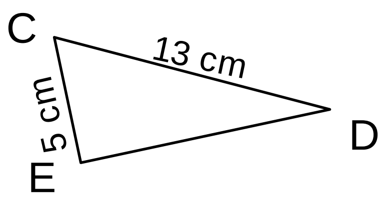
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

donc $BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

donc $BC = \sqrt{25} = 5$ cm

Exemple 2 : recherche d'un "petit" côté.

Soit CDE un triangle rectangle en E tel que CE = 5 cm et CD = 13 cm.
Calculer DE.



Dans CDE rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore,

$$CD^2 = CE^2 + DE^2$$

donc $13^2 = 5^2 + DE^2$

donc $169 = 25 + DE^2$

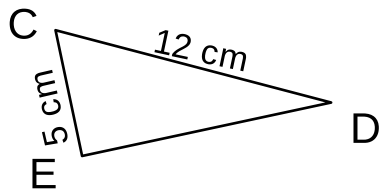
$\downarrow -25 \quad \downarrow -25$

donc $144 = DE^2$

donc $DE = \sqrt{144} = 12$ cm.

<u>Exemple 3 :</u> recherche d'un "petit" côté.

Soit CDE un triangle rectangle en E tel que CE = 5 cm et CD = 12 cm.
Calculer DE.



Dans CDE rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore,

$$CD^2 = CE^2 + DE^2$$

donc $12^2 = 5^2 + DE^2$

donc $144 = 25 + DE^2$

$\downarrow -25 \quad \downarrow -25$

donc $119 = DE^2$

donc $DE = \sqrt{119} \approx 10{,}9$ cm.

<u>Propriété</u> réciproque de Pythagore : admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.

- Soit ABC un triangle.
  Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse ; le triangle est rectangle en A.

Exemple : prouver qu'un triangle est rectangle.

Soit ABC un triangle tel que AB = 6 cm, BC = 8 cm et AC = 10 cm.

Quelle est la nature de ABC ?

Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté.

D'une part $AC^2 = 10^2 = 100$

D'autre part $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B (*car [AC] est l'hypoténuse*).

Résumé :

Théorème de Pythagore

$\begin{cases} \text{[BC] est le plus grand côté} \\ \text{ABC rectangle en A} \end{cases}$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Propriété réciproque de Pythagore

Contraposée de Pythagore :

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrées des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.

- Soit ABC un triangle.
  Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemple : prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que AB = 5 cm, BC = 7 cm et AC = 6 cm. Quelle est la nature de ABC ?

Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté.

D'une part, $BC^2 = 7^2 = 49$

D'autre part $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$

Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors ABC n'est pas rectangle.

Préliminaire

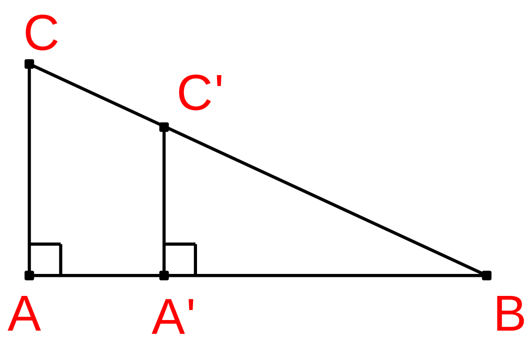
Dans un triangle rectangle, les rapports suivants ne dépendent que de la mesure de l'angle et non de celles des côtés :

- Côté adjacent à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé sur côté adjacent du même angle aigu.

On les appelle respectivement ***cosinus***, ***sinus*** et ***tangente*** de l'angle aigu.

Démonstration

Comme (A'C') et (AC) sont perpendiculaires à (AB) alors (AC)//(A'C').



Comme (AC)//(A'C') et comme B, A', A et B, C', C sont alignés, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$BA' \times BC = BC' \times BA$$

$\downarrow \div BC'$ $\downarrow \div BC$ $\downarrow \div BC'$ $\downarrow \div BC$

donc $\dfrac{BA'}{BC'} = \dfrac{BA}{BC}$ = cosinus de l'angle $\widehat{B}$

$$BC' \times AC = BC \times A'C'$$

$\downarrow \div BC'$ $\downarrow \div BC$ $\downarrow \div BC$ $\downarrow \div BC'$

donc $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A'C'}{BC'}$ = sinus de l'angle $\widehat{B}$

$$BA' \times AC = BA \times A'C'$$

$\downarrow \div BA'$ $\downarrow \div BA$ $\downarrow \div BA$ $\downarrow \div BA'$

donc $\dfrac{AC}{BA} = \dfrac{A'C'}{BA'}$ = tangente de l'angle $\widehat{B}$

Propriété

Dans un triangle rectangle :

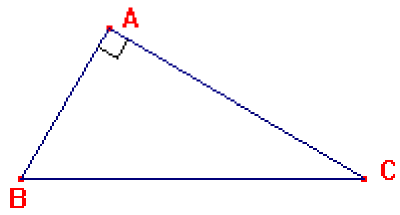
- Le cosinus d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.

- Le sinus d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.

- La tangente d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par son côté adjacent.

Formules

Soit ABC un triangle rectangle en A.



$$\cos\left(\hat{B}\right)=\frac{AB}{BC} \quad \sin\left(\hat{B}\right)=\frac{AC}{BC} \quad \tan\left(\hat{B}\right)=\frac{AC}{AB}$$

$$\cos(\hat{C})=\frac{AC}{BC} \quad \sin(\hat{C})=\frac{AB}{BC} \quad \tan(\hat{C})=\frac{AB}{AC}$$

Comment se rappeler des formules ?

Méthode 1 :

SOHCAHTOA

→ **S**in = **O**pposé / **H**ypoténuse **C**os = **A**djacent / **H**ypoténuse
Tan = **O**pposé / **A**djacent

CAHSOHTOA

→ **C**os = **A**djacent / **H**ypoténuse **S**in = **O**pposé / **H**ypoténuse
Tan = **O**pposé / **A**djacent

Méthode 2 :

COSADJHYP → **COS**inus = **ADJ**acent / **HYP**oténuse
SINOPPHYP → **SIN**us = **OPP**osé / **HYP**oténuse
TANGOPPADJ → **TANG**ente = **OPP**osé / **ADJ**acent

Utilisation de la calculatrice :

ⓘ Bien veiller à ce que la calculatrice soit en « mode degré ».

Calcul d'une ligne trigonométrique lorsque l'on connaît une mesure de l'angle :

✍ On appuie sur la touche $\boxed{\text{COS}}$ ou $\boxed{\text{SIN}}$ ou $\boxed{\text{TAN}}$, puis on tape une mesure de l'angle et on appuie sur la touche $\boxed{=}$.

Calcul d'une meure d'un angle lorsque l'on connaît son sinus ou son cosinus ou sa tangente :

✍ On appuie sur la touche $\boxed{COS^{-1}}$ ou $\boxed{SIN^{-1}}$ ou $\boxed{TAN^{-1}}$, puis on tape la valeur de la ligne trigonométrique et on appuie sur la touche $\boxed{=}$.

Sur certaines machines les touches $\boxed{COS^{-1}}$ ou $\boxed{SIN^{-1}}$ ou $\boxed{TAN^{-1}}$ sont remplacées par les touches $\boxed{ACS}$ ou $\boxed{ASN}$ ou $\boxed{ATN}$.

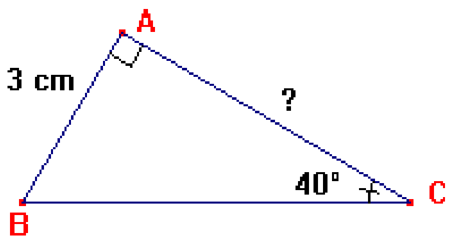
On obtient ses touches en appuyant préalablement sur la touche $\boxed{\text{SHIFT}}$ ou $\boxed{\text{SECONDE}}$ (souvent en haut à gauche).

Exemple d'exercice 1 : (recherche d'un côté).

Enoncé :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et $\hat{C} = 40°$.

Calculer AC.



Réponse :

Dans ABC rectangle en A,

Je connais l'angle $\hat{c}$, son côté opposé et je cherche son côté adjacent.

La formule dans laquelle interviennent ses trois quantités est la tangente.

Je remplace les inconnues par les données de l'énoncé.

J'effectue le produit en croix en remplaçant tan(40°) par $\frac{\tan(40°)}{1}$

$\tan(\hat{c}) = \frac{AB}{AC}$ donc $\tan(40°) = \frac{3}{AC}$ donc $\tan(40°) \times AC = 3$ donc

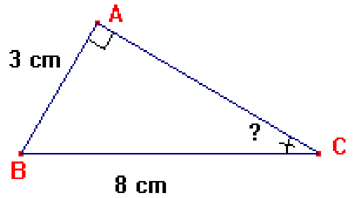
$\boxed{AC = \frac{3}{\tan(40°)} \approx 3{,}58 \text{ cm}}$.

Je résous l'équation et donne éventuellement une valeur approchée du résultat.
J'ai tapé : 3 $\boxed{\div}$ $\boxed{\tan}$ 40 $\boxed{=}$
Je n'oublie pas de mettre en valeur le résultat et d'écrire l'éventuelle unité.

Exemple d'exercice 2 : (recherche d'un angle).

Enoncé :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et BC = 8 cm. Calculer une mesure, au degré près, de $\hat{C}$.



Réponse :

Dans ABC rectangle en A,

$$\sin(\hat{C}) = \frac{AB}{BC} \text{ donc } \sin(\hat{C}) = \frac{3}{8} \text{ donc } \boxed{\hat{C} = \arcsin\left(\frac{3}{8}\right) \approx 22°}.$$

Je cherche l'angle $\hat{C}$. Je connais son côté opposé et l'hypoténuse.

La formule dans laquelle interviennent ses trois quantités est le sinus.

Je remplace les inconnues par les données de l'énoncé.
Je simplifie, éventuellement la fraction.

J'ai tapé :
$\boxed{\sin^{-1}}$ $\boxed{(}$ 3 $\boxed{\div}$ 8 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$
Je n'oublie pas de mettre en valeur le résultat et l'unité (degré)**.**

Propriété : admise

Soit α un angle.

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Exemple d'application :

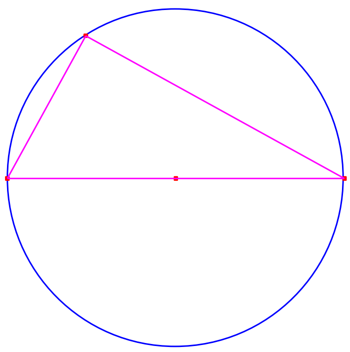
Soit α un angle tel que $\cos(\alpha) = 0{,}6$.
Calculer $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$.

Comme $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
alors $0{,}6^2 + \sin^2(\alpha) = 1$
donc $0{,}36 + \sin^2(\alpha) = 1$
donc $\sin^2(\alpha) = 0{,}64$
donc $\sin(\alpha) = 0{,}8$

Comme $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ alors $\tan(\alpha) = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3}$

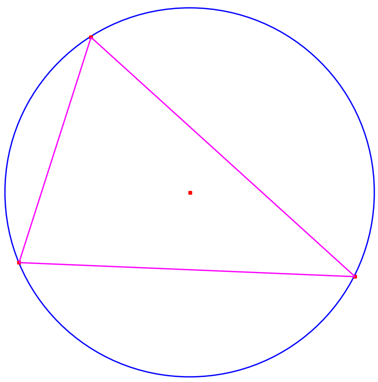
Propriété du triangle rectangle inscrit dans un cercle admise

Si un triangle est inscrit dans un cercle (ses 3 sommets sont sur le cercle) et a pour côté un diamètre du cercle, alors ce triangle est rectangle.

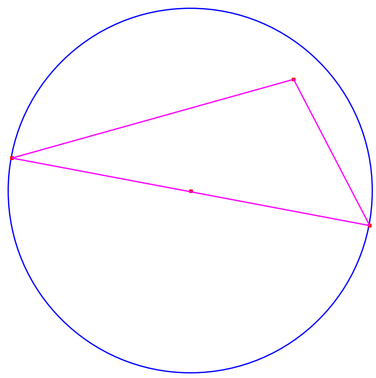


Remarque

Les deux conditions sont indispensables. Si on en enlève une, le triangle n'est pas rectangle.



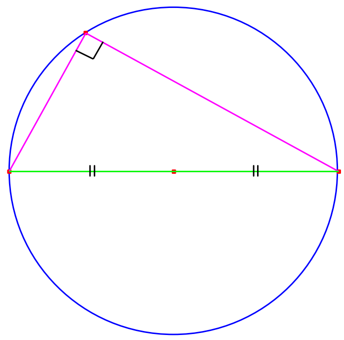
Aucun côté ne passe par le centre du cercle.



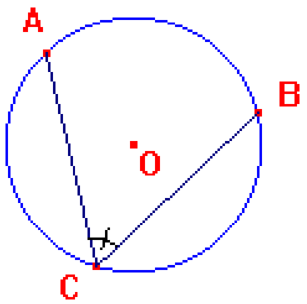
Le triangle n'est pas inscrit dans le cercle.

Propriété du cercle circonscrit au triangle rectangle admise

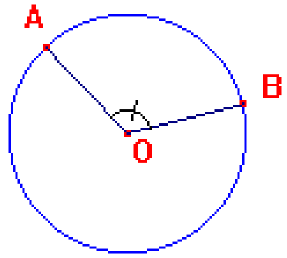
Si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.



Définitions



On appelle **angle inscrit** à un cercle, un angle formé par trois points du cercle.

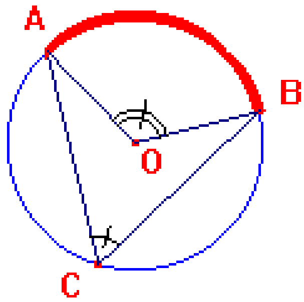


On appelle **angle au centre** à un cercle, un angle formé par un point du cercle, le centre et un autre point du cercle.

Propriété (admise)

La mesure d'un angle au centre est le double de la mesure d'un angle inscrit qui intercepte le même arc.

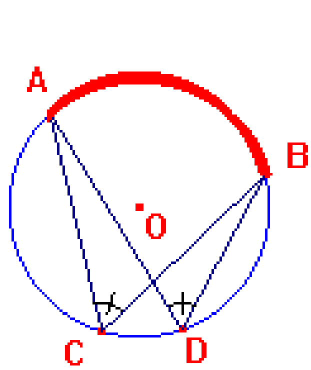
$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB}$$



Propriété

Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$$



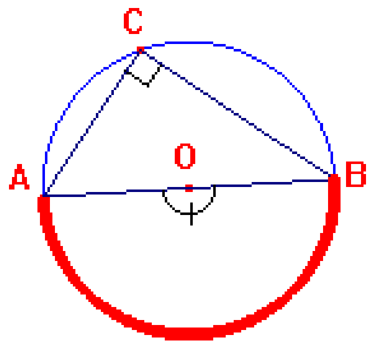
Démonstration :

L'angle au centre $\widehat{AOB}$ et l'angle inscrit $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc AB donc $\widehat{ACB} = \widehat{AOB} \div 2$.

L'angle au centre $\widehat{AOB}$ et l'angle inscrit $\widehat{ADB}$ interceptent le même arc AB donc $\widehat{ADB} = \widehat{AOB} \div 2$.

Comme $\widehat{ACB} = \widehat{AOB} \div 2$ et $\widehat{ADB} = \widehat{AOB} \div 2$ alors $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Conséquence immédiate : *(propriété du triangle rectangle inscrit dans un cercle)*

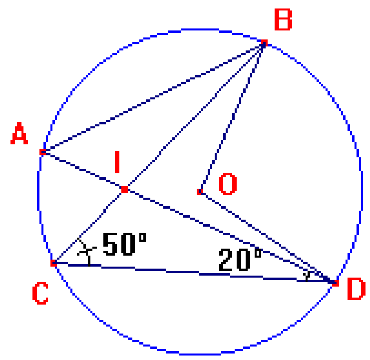


Comme [AB] est un diamètre du cercle de centre O, $\widehat{AOB} = 180°$.

Comme l'angle $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc AB, alors $\widehat{ACB} = \widehat{AOB} \div 2$

donc $\widehat{ACB} = 180 \div 2 = 90°$ donc ABC est rectangle en C.

Exemple d'exercice :



Enoncé :

a- Déterminer les mesures des angles du triangle IAB de la figure ci-contre.

b- Calculer $\widehat{BOD}$.

Réponse :

a- Dans le triangle CDI, comme la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°, $\hat{I} = 180 - (\hat{C} + \hat{D})$ donc $\hat{I} = 180 - (50 + 20)$ donc $\hat{I} = 110°$.

Comme $\widehat{AIB}$ et $\widehat{CID}$ sont opposés par le sommet, alors $\boxed{\widehat{AIB} = 110°}$.

Comme les angles inscrits $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BD}$ alors $\widehat{BCD} = \boxed{\widehat{BAD} = 50°}$.

Dans le triangle ABI, comme la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°,

alors $\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{I})$ donc $\hat{B} = 180 - (50 + 110)$ donc $\boxed{\hat{B} = 20°}$.

b- Comme l'angle au centre $\widehat{BOD}$ et l'angle inscrit $\widehat{BCD}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BD}$ alors $\widehat{BOD} = 2 \times \widehat{BCD}$ donc $\widehat{BOD} = 2 \times 50$ donc $\boxed{\widehat{BOD} = 100°}$.

	cosinus	sinus	tangente
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

Exemple d'application :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 7 cm et $\widehat{B}$ *=60°.*

Calculer AC

Dans ABC rectangle en A,

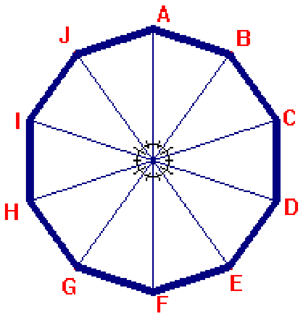
$\tan(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB}$ donc $\tan(60°) = \frac{AC}{7}$ donc $\sqrt{3} = \frac{AC}{7}$

donc $\boxed{AC = 7\sqrt{3} \text{ cm}}$

Polygones réguliers

A - Généralités

Définition :



Polygone régulier à 10 côtés

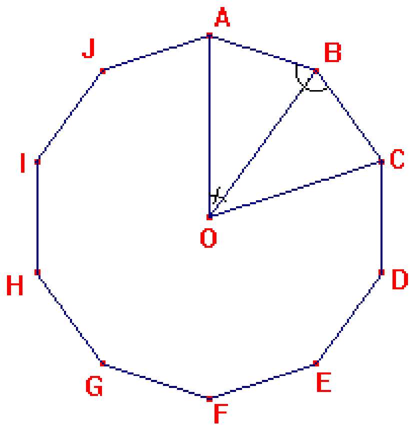
Un ***polygone régulier*** à n côtés est une figure

- qui a n côtés de même mesure
- dont les angles sont égaux.

Propriété :

Dans un polygone régulier à n cotés :

- les angles au centre mesurent tous $\frac{360}{n}$ degrés
- les angles formés par 2 côtés consécutifs mesurent tous : $180 - \frac{360}{n}$
- les sommets sont équidistants du centre du polygone



Démonstration :

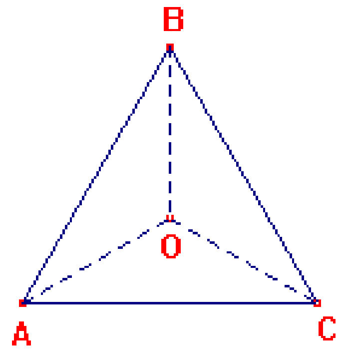
Comme les angles au centre sont tous égaux et comme la somme de tous ces angles vaut 360°, on a $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \ldots = \frac{360}{n}$.

Comme A et B sont équidistants de O alors OA = OB donc ABO est isocèle en O donc $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.
Dans ABO, la somme des mesures des angles vaut 180° donc $\widehat{OAB} + \widehat{OBA} + \widehat{AOB} = 180°$.
Donc $\widehat{OBA} + \widehat{OBA} + \frac{360}{n} = 180$ donc $2\,\widehat{OBA} = 180 - \frac{360}{n}$ donc $\widehat{OBA} = \left(180 - \frac{360}{n}\right) \div 2$.

On prouve, de même, que $\widehat{OBC} = \left(180 - \frac{360}{n}\right) \div 2$.

Comme $\widehat{OBA}$ et $\widehat{OBC}$ sont adjacents alors $\widehat{ABC} = \widehat{OBA} + \widehat{OBC} = 180 - \frac{360}{n} = 180 - \widehat{AOB}$.

B – Polygone régulier à 3 cotés *(triangle équilatéral)*

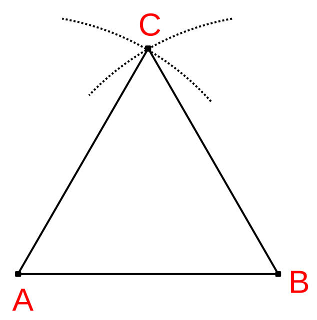


Remarque :

$$\widehat{AOB} = \frac{360}{3} = 120°.$$

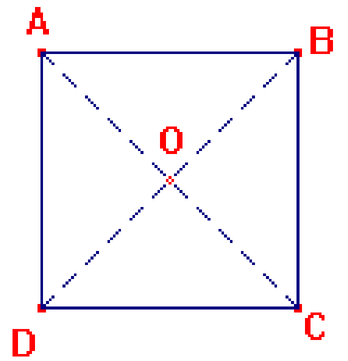
$$\widehat{ABC} = 180 – 120 = 60°.$$

Construction *avec la règle (non graduée) et le compas* :



1. Tracer un segment [AB].
2. Tracer les cercles de centres A et B, de rayon AB.
3. Ils se coupent en deux points. On appelle C l'un d'eux.
4. ABC est un triangle équilatéral.

C – Polygone régulier à 4 cotés *(carré)*

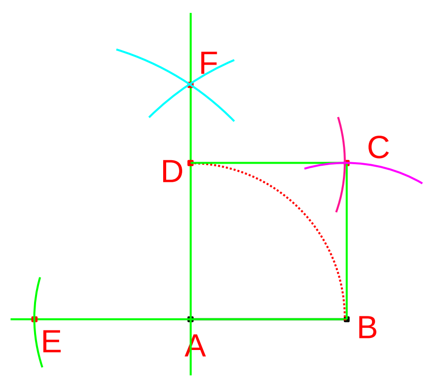


Remarque :

$$\widehat{AOB} = \frac{360}{4} = 90°.$$

$$\widehat{ABC} = 180 – 90 = 90°.$$

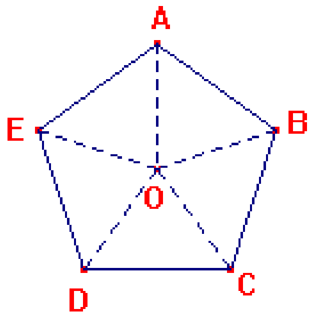
Construction *avec la règle (non graduée) et le compas* :



1. Tracer un segment [AB].
2. Tracer la demi-droite [BA).
3. Tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon AB : il coupe [AB) en E.
4. Tracer la médiatrice de [BE] : tracer deux cercles de centres B et E et de même rayon ; ils se coupent en F. Tracer (AF).

5. Tracer le cercle de centre A qui passe par B ; il coupe [AF) en D.
6. Tracer les cercles de centre B et D de rayon AB ; ils se coupent en C.

D - Polygone régulier à 5 cotés *(pentagone régulier)*

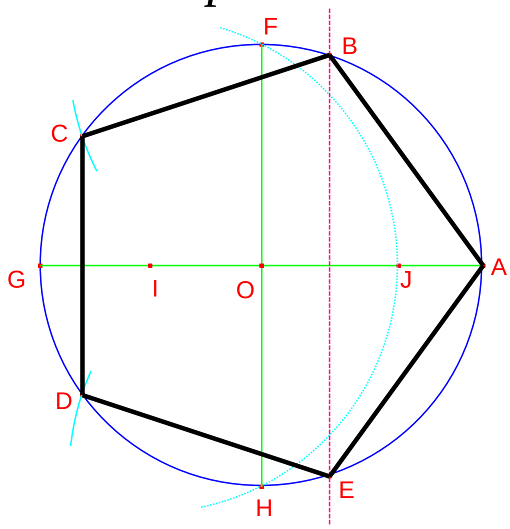


Remarque :

$$\widehat{AOB} = \frac{360}{5} = 72°.$$

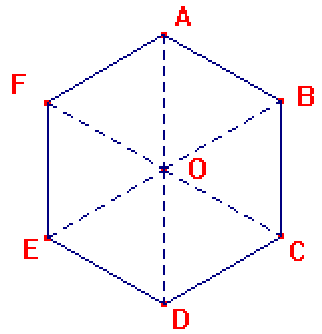
$$\widehat{ABC} = 180 - 72 = 108°.$$

Construction *avec la règle (non graduée) et le compas* :



1. Tracer un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O.
2. Tracer deux diamètres perpendiculaires [AG] et [FH].
3. Placer le point I au milieu de [GO] (on trace la médiatrice de [GO]).
4. Tracer le cercle de centre I qui passe par F. Il coupe [OA] en J.
5. Tracer la médiatrice de [OJ]. Elle coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en B et E.
6. Reporter la longueur AB sur le cercle ; on obtient les points C et D.
7. Tracer le pentagone régulier ABCDE.

E – Polygone régulier à 6 cotés *(hexagone régulier)*



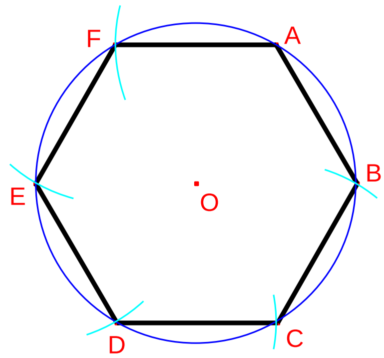
Remarque :

$$\widehat{AOB} = \frac{360}{6} = 60°.$$

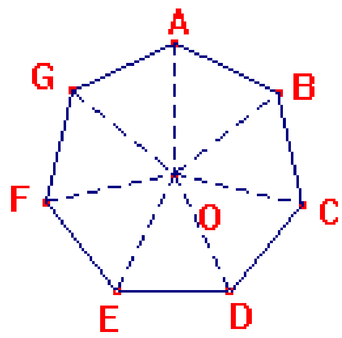
$$\widehat{ABC} = 180 - 60 = 120°.$$

Construction *avec la règle (non graduée) et le compas* :

1. Tracer un cercle de centre O.
2. Placer un point A sur le cercle.
3. Reporter 5 fois le rayon sur le cercle de manière à placer les points B, C, D, E et F.
4. Tracer l'hexagone ABCDEF.



F – Polygone régulier à 7 cotés *(heptagone régulier)*



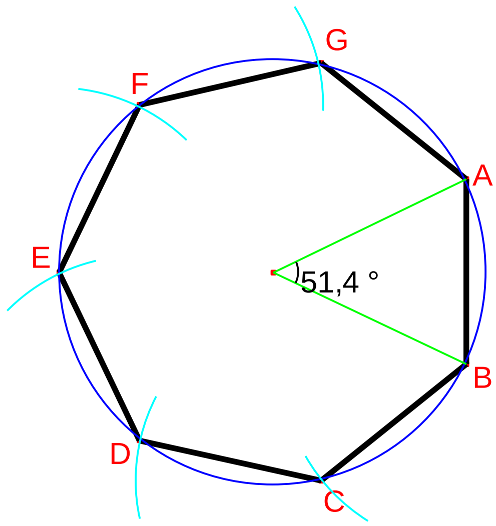
Remarque :

$$\widehat{AOB} = \frac{360}{7} \approx 51{,}43°.$$

$$\widehat{ABC} = 180 - 51{,}43 = 128{,}57°.$$

Construction : On ne peut pas construire ce polygone avec la règle et le compas

1. Tracer un cercle de centre O.
2. Soit A un point de ce cercle.
3. Soit B un point de ce cercle tel que $\widehat{AOB} = \frac{360}{7} \approx 51{,}43°$.
4. Reporter la longueur AB sur le cercle de manière à construire les points C, D, E, F et G.
5. Tracer l'heptagone ABCDEFG.



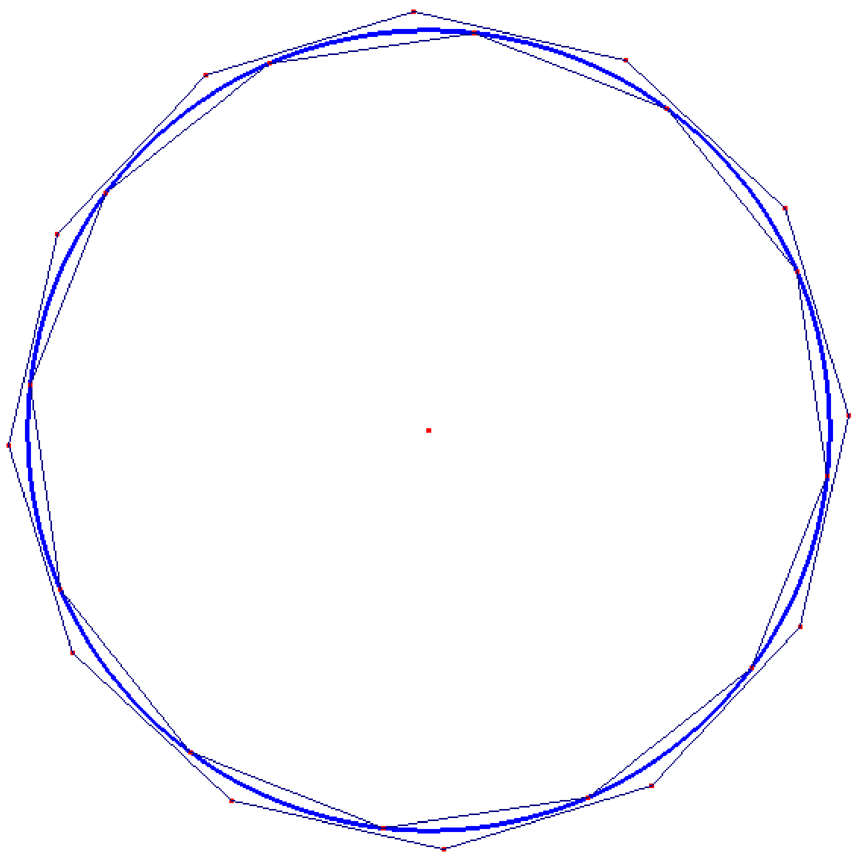
G – Remarque :

Savoir tracer un polygone et savoir en calculer la longueur permet de déterminer une valeur approchée du nombre π. C'est la méthode employée par les grecs dans l'antiquité.

Archimède a ainsi encadré un cercle par deux polygones de 192 côtés. Il a déterminé les longueurs des deux polygones et il a trouvé pour encadrement de π :

$$3+\frac{10}{71} \langle \pi \langle 3+\frac{1}{7}$$ soit environ

$$3{,}1408 < \pi < 3{,}1429.$$



Sur cette figure, on a encadré le cercle par deux polygones à 12 côtés.
On remarque que la longueur du cercle est très proche de celle des polygones.
Pour un polygone à 192 côtés, c'est beaucoup plus frappant.