Calculs avec des nombres sous forme fractionnaire

Définitions

Un nombre en écriture fractionnaire s'écrit sous la forme

$$\frac{a}{b} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{le numérateur} \\ \leftarrow \text{le dénominateur} \end{array}$$

On parle de fraction lorsque l'on a une écriture fractionnaire qui a un numérateur et un dénominateur entiers.

On parle de fraction décimale lorsque l'on a une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000, 10000 ...

Propriété addition de fractions de même dénominateur admise

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$$

Exemples

$$\frac{1}{2}+\frac{8}{2}=\frac{1+8}{2}=\frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{8}{3}=\frac{1-8}{3}=\frac{-7}{3}$$

$$\frac{-1}{2}-\frac{8}{2}=\frac{-1-8}{2}=\frac{-9}{2}$$

$$\frac{-15}{6}-\frac{-8}{6}=\frac{-15-(-8)}{6}=\frac{-15+8}{6}=\frac{-7}{6}$$

Propriété égalité de fractions admise

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} = \frac{ac}{bc}$$

Deux fractions sont égales, si pour passer de l'une à l'autre, on multiplie (ou on divise) le numérateur et dénominateur de la première par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur de la deuxième.

Exemples

$$\frac{5}{2} = \frac{5 \times 7}{2 \times 7} = \frac{35}{14} \qquad \frac{3}{7} = \frac{3 \times 8}{7 \times 8} = \frac{24}{56} \qquad \frac{45}{25} = \frac{45 \div 5}{25 \div 5} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{72}{24} = \frac{72 \div 2}{24 \div 2} = \frac{36}{12} = \frac{36 \div 2}{12 \div 2} = \frac{18}{6} = 3$$

Définition

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction égale à la première telle que la distance à zéro de son numérateur (et de son dénominateur) soit plus petite.

Remarque

Dans les calculs, il faut toujours simplifier (le plus possible) les résultats obtenus.

On verra en 3ème une méthode où l'on est sûr de simplifier au maximum (Le PGCD). Pour la 4ème, la calculatrice le fait ...

Comment transformer une écriture fractionnaire en fractions ?

On utilise la règle d'égalité des fractions pour obtenir un numérateur et un dénominateur entiers (on peut multiplier par 10, 100, 1000, 10000, …).

Il peut être nécessaire de simplifier la fraction

Exemples

$$\frac{5,2}{2}=\frac{5,2\times 10}{2\times 10}=\frac{52}{20}=\frac{26}{10}=\frac{13}{5} \qquad \frac{4,5}{3,7}=\frac{4,5\times 10}{3,7\times 10}=\frac{45}{37}$$

$$\frac{4,51}{3,7}=\frac{4,51\times 100}{3,7\times 100}=\frac{451}{370}$$

Définition

Mettre deux fractions au même dénominateur, c'est se "débrouiller" (en utilisant la propriété d'égalité de fractions) pour que les deux fractions aient le même dénominateur.

Remarque

Un dénominateur commun peut être le produit des dénominateurs.

Comment additionner deux fractions de dénominateurs différents ?

On se "débrouille" pour les mettre au même dénominateur puis on utilise la propriété d'addition ci-dessus.

Exemples

$$\frac{7}{2}+\frac{5}{3}=\frac{7\times 3}{2\times 3}+\frac{5\times 2}{3\times 2}=\frac{21}{6}+\frac{10}{6}=\frac{31}{6}$$

$$\frac{5}{34}+\frac{8}{51}=\frac{5\times 51}{34\times 51}+\frac{8\times 34}{51\times 34}=\frac{255}{1734}+\frac{272}{1734}=\frac{527}{1734}$$

Remarque

Cette méthode "marche" très bien, mais il faut penser à simplifier les fractions. Ici, $\frac{527}{1734}=\frac{31}{102}$.

Astuce

Pour chercher un dénominateur commun, on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs (ici 34 et 51). Pour cela, on écrit la table des multiples de chacun des deux nombres et on prend le plus petit multiple qui se trouve dans les deux listes.

Multiples de 34	34	68	102	…
Multiples de 51	51	102	…	

102 est le plus petit multiple commun à 34 et 51. Il est inutile de poursuivre la liste des multiples.

$$\frac{5\times 3}{34\times 3}+\frac{8\times 2}{51\times 2}=\frac{15}{102}+\frac{16}{102}=\frac{31}{102}.$$

Cette méthode peut être très longue …

Signes des fractions

Une fraction est une division, donc la règle des signes s'applique pour déterminer le signe d'une fraction (on compte le nombre de termes négatifs).

Exemples

$$\frac{-3}{4}=\frac{3}{-4}=-\frac{-3}{-4}=-\frac{3}{4}=-0,75$$

Il y a 1 (ou 3) terme(s) négatif(s), donc le résultat est négatif.

$$\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}=0,75$$

Il y a 2 termes négatifs, donc le résultat est positif.

Propriété multiplication de fractions admise

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}}$$

Astuce

Pour déterminer le signe, on utilise la règle des signes.

Exemples

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{4\times 3}{5\times 2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

$$\frac{-5}{3}\times\frac{-8}{-4}=-\frac{5\times 8}{3\times 4}=-\frac{40}{12}=-\frac{10}{3}$$

Il y a 3 termes négatifs, donc le résultat est négatif.

Définition :

Prendre une fraction d'une quantité c'est multiplier cette quantité par la fraction.

Exemples :

Prendre $\frac{4}{5}$ de 1200 c'est prendre

$$\frac{4}{5}\times 1200=\frac{4\times 1200}{5}=\frac{4800}{5}=960.$$

Prendre 15% de 320 €, c'est prendre $\frac{15}{100}$ de 320 €, c'est prendre $\frac{15}{100}\times 320=\frac{15\times 320}{100}=\frac{4800}{100}=48$ €.

$2\times\frac{3}{5}\neq\frac{2\times 3}{2\times 5}$ mais $2\times\frac{3}{5}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{5}=\frac{2\times 3}{1\times 5}=\frac{6}{5}$

<u>Définition :</u>

L'<u>inverse</u> d'un nombre *a* non nul est le nombre qui multiplié par *a* vaut 1. L'inverse de a est noté : a^{-1}.

<u>Exemples :</u>

L'inverse de 2 est 0,5 car 2 × 0,5 = 1

L'inverse de 4 est 0,25 car 4 × 0,25 = 1

L'inverse de 0,8 est 1,25 car 0,8×1,25 = 1

<u>Propriété :</u>

L'inverse du nombre *a* vaut $\frac{1}{a}$.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

<u>Exemples :</u>

Nombre	2	-5	$\frac{3}{4}$	$\frac{-5}{6}$	$-\frac{6}{7}$	0

Inverse	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{-5}=-\frac{6}{5}$	$-\frac{7}{6}$	**N'existe pas**

Démonstration :

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$$

Ne pas confondre inverse et opposé.
L'opposé de 2 est –2.
L'inverse de 2 est ½.

Définition :

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

Exemples :

Diviser par 5 c'est multiplier par $\frac{1}{5}$.

Diviser par $\frac{3}{4}$ c'est multiplier par $\frac{4}{3}$.

Diviser par $-\frac{4}{7}$ c'est multiplier par $-\frac{7}{4}$.

Exemples :

$$\frac{3}{2}\div 5=\frac{3}{2}\times\frac{1}{5}=\boxed{\frac{3}{10}}$$

On inverse uniquement le nombre se trouvant après le symbole de division et pas celui qui est avant.

$$\frac{5}{2}\div\frac{3}{4}=\frac{5}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{20}{6}=\boxed{\frac{10}{3}}$$

$$\frac{5}{2} \div \frac{-4}{7} = \frac{5}{2} \times \frac{-7}{4} = \boxed{-\frac{35}{8}}$$

$$2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

Remarques :

- $\frac{3}{5}$ est une notation de 3÷5 qui vaut 0,6.
- Il n'est pas possible de donner une valeur décimale pour toutes les fractions (exemple : 1/3 ≈ 0,33).

> Attention à la position du signe d'égalité lorsqu'il y a des fractions à "étages".
>
> $$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$$
>
> mais $\dfrac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \div \frac{2}{3} = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

<u>Exemples :</u> de calculs complexes

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{5}{4}\div\frac{-1}{4}=\frac{5}{4}\times\frac{-4}{1}=\frac{-20}{4}=-5$$

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{7}{8}}=\frac{\frac{2}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{20}{24}-\frac{21}{24}}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{-1}{24}}=\frac{5}{4}\div\frac{-1}{24}=-\frac{5}{4}\times\frac{24}{1}$$

$$=-\frac{5}{\cancel{4}}\times\frac{6\times\cancel{4}}{1}=-\frac{30}{1}=-30$$

$$-1-\frac{5}{12}\div\left(\frac{66}{99}-\frac{18}{12}\right)=-1-\frac{5}{12}\div\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=-1-\frac{5}{12}\div\left(\frac{4}{6}-\frac{9}{6}\right)=-1-\frac{5}{12}\div\frac{-5}{6}$$

$$=-1-\frac{5}{2\times6}\times\frac{6}{-5}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{13}{14}}{\frac{4}{3}-\frac{5}{7}}=\frac{\left(\frac{9}{6}-\frac{2}{6}\right)\times\frac{13}{14}}{\frac{28}{21}-\frac{15}{21}}$$

$$=\frac{\frac{7}{6}\times\frac{13}{14}}{\frac{13}{21}}=\frac{\frac{13}{12}}{\frac{13}{21}}=\frac{13}{12}\times\frac{21}{13}=\frac{21}{12}=\frac{7}{4}$$