Proportionnalité, théorème de Thalès

Définition :

Deux séries de valeurs sont dites proportionnelles si pour passer de l'une à l'autre on multiplie toujours par un même nombre appelé le coefficient de proportionnalité.

Exemple :

Volume de sans plomb98 en litres	15	23	12
Prix en €	22,80	34,96	18,24

$\times 1{,}52$

Propriété admise

$$a\times\frac{b}{a}=b$$

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times\frac{b}{a}} b$$

Exemples :

$$7 \xrightarrow{\times\frac{13}{7}} 13 \quad \text{car } 7\times\frac{13}{7}=13$$

$$\times\frac{15}{6}$$

$6 \quad \rightarrow \quad 15$ car $6\times\frac{15}{6}=15$ et on a $\frac{15}{6}=2,5$

<u>Comment</u> déterminer si un tableau correspond à une situation de proportionnalité ?

1°) On calcule, séparément, les quotients qui permettent de passer d'une valeur à la valeur correspondante.

2°) Si les quotients sont tous égaux, c'est une situation de proportionnalité.

Sinon, cela ne l'est pas.

<u>Exemple 1</u>

Masse de fraises en kg	3	5	7
Prix en €	5,10	8,50	11,90

Pour passer de 3 à 5,1 on multiplie par $\frac{5,1}{3}=1,7$

Pour passer de 5 à 8,5 on multiplie par $\frac{8,5}{5}=1,7$

Pour passer de 7 à 11,9 on multiplie par $\frac{11,9}{7}=1,7$

On a $\frac{5,1}{3}=\frac{8,5}{5}=\frac{11,9}{7}=1,7$; c'est donc bien une situation de proportionnalité et le coefficient de proportionnalité est 1,7.

Exemple 2 :

Masse de poires en kg	3	5	7
Prix en €	4,80	8,00	11,00

Pour passer de 3 à 4,8 on multiplie par $\frac{4,8}{3} = 1,6$

Pour passer de 5 à 8 on multiplie par $\frac{8}{5} = 1,6$

Pour passer de 7 à 11 on multiplie par $\frac{11}{7} \approx 1,57$

On a $\frac{4,8}{3} \neq \frac{11}{7}$; $\boxed{\text{ce n'est donc pas une situation de proportionnalité}}$

Exemple 3 :

9	15	18
12	20	24

$\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ et $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ et $\frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

donc $\frac{12}{9} = \frac{20}{15} = \frac{24}{18}$; $\boxed{\text{c'est donc une situation de proportionnalité}}$.

Propriété : produits en croix - admise

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$

Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemple 1

On veut comparer $\frac{65}{91}$ et $\frac{115}{161}$.

On calcule séparément les produits en croix :

$65 \times 161 = 10465$

et $91 \times 115 = 10465$

Donc $65 \times 161 = 91 \times 115$ donc $\boxed{\frac{65}{91} = \frac{115}{161}}$

Exemple 2

On veut comparer $\frac{7}{13}$ et $\frac{9}{17}$.

On calcule séparément les produits en croix :

$7 \times 17 = 119$

et $13 \times 9 = 117$

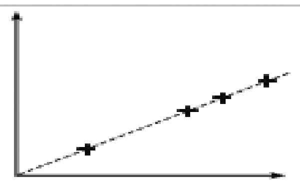
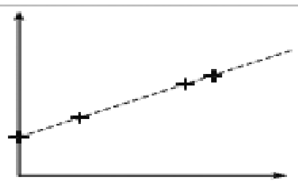
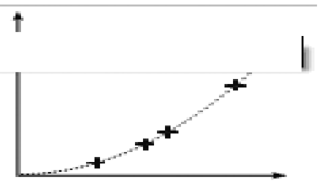
Donc $7 \times 17 \neq 13 \times 9$ donc $\boxed{\frac{7}{13} \neq \frac{9}{17}}$

Propriété – admise

La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est

- une droite
- qui passe par l'origine du repère

Exemples :

		
Une droite qui passe par l'origine	Une droite qui ne passe pas par l'origine	Pas une droite

Conversion d’heures

1,15 h = 1h + 0,15h = 1h + 9min

$\times 60$

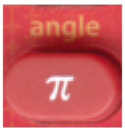
CASIO FX92

1,15 $\boxed{\text{EXE}}$ 

➔ 1°9'0" qui se lit 1h 9min 0s

TEXAS INSTRUMENTS

1,15 



$\boxed{\to\text{DMS}}$ 

1h12min = 1h + 12min = 1h + 0,2h = 1,2h

$\div 60$

CASIO FX92

1 

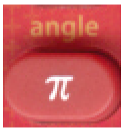
12 

$\boxed{\text{EXE}}$ 

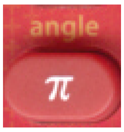
➔ 1,2 qui se lit 1,2h

TEXAS INSTRUMENTS

1 



$\boxed{°}$ 12 



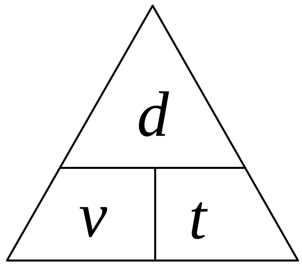
$\boxed{'}$ 

Propriétés admises

Si d est la distance, t le temps et v la vitesse moyenne on a alors : $v=\dfrac{d}{t}$ et $v\times t=d$ et $t=\dfrac{d}{v}$

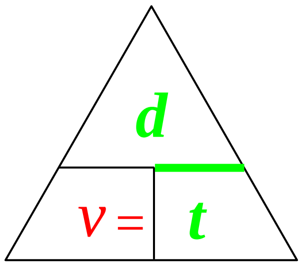
<u>Comment</u> retrouver les formules ?

On apprend la « pyramide » suivante :



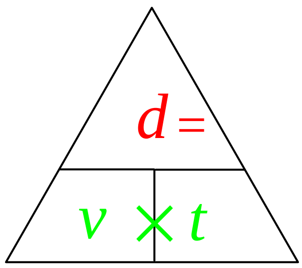
On cherche v.

On trouve $v = \dfrac{d}{t}$



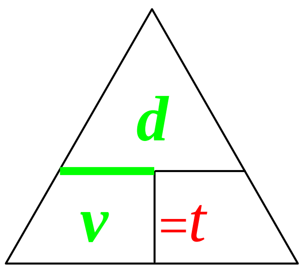
On cherche d.

On trouve $d = v \times t$



On cherche t.

On trouve $t = \dfrac{d}{v}$



Exemple 1 : recherche de la vitesse moyenne

Clément roule pendant 3h et parcourt 183km. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Calculons sa vitesse moyenne

Méthode 1 :

$$v=\frac{d}{t}=\frac{183}{3}=61$$

Méthode 2 :

Distance	Temps
183 km	3 h
?	1 h

$$3\text{ h} \xrightarrow{\div 3} 1\text{ h}$$

$$?=\frac{183}{3}=61$$

Sa vitesse moyenne est $\boxed{61\text{ km/h}}$.

Exemple 2 : recherche de la distance parcourue

Mathieu roule pendant 3h à 43 km/h de moyenne. Quelle est la distance parcourue ?

Calculons la distance parcourue

Méthode 1 :

$d = t\times v = 3\times 43 = 129$

Méthode 2 :

Distance	Temps
43 km	1 h
?	3 h

$$1\text{ h} \xrightarrow{\times 3} 3\text{ h}$$

$d = 43\times 3 = 129$

La distance parcourue est $\boxed{129\text{ km}}$.

Exemple 3 : recherche du temps de parcours

Pauline marche pendant 12km à la vitesse moyenne de 4,5 km/h. Quel est le temps de parcours ?

Calculons le temps de parcours

Méthode 1 :

$$t=\frac{d}{v}=\frac{12}{4,5}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$$

Méthode 2 :

Distance	Temps
4,5 km	1 h
12 km	?

$$\times\frac{12}{4,5}$$

$$?=1\times\frac{12}{4,5}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$$

Le temps de parcours est de $\boxed{\frac{8}{3}\text{h} = 2\text{h } 40\text{min}}$

à la calculatrice

Définitions

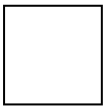
Si les côtés d'une figure sont proportionnels aux côtés d'une autre figure, on dit que l'on passe de l'une à l'autre en effectuant un agrandissement-réduction.

On appelle k le rapport de proportionnalité.

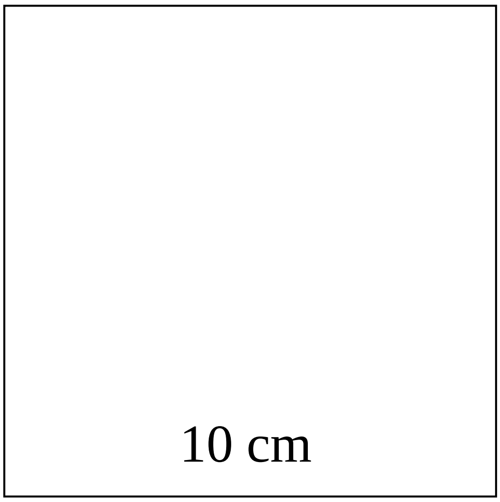
Si 0<k<1 on dit qu'il s'agit d'une réduction.

Si 1<k on dit qu'il s'agit d'un agrandissement.

Exemples



2 cm

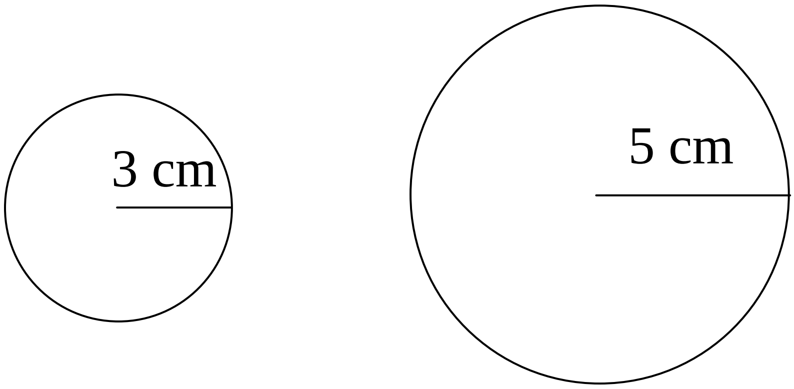


Pour passer de 2 cm à 10 cm, on multiplie par $\frac{10}{2} = 5$.

Le grand carré est un agrandissement du petit de coefficient 5.

Pour passer de 10 cm à 2 cm, on multiplie par $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Le petit carré est une réduction du grand de coefficient $\frac{1}{5}$.



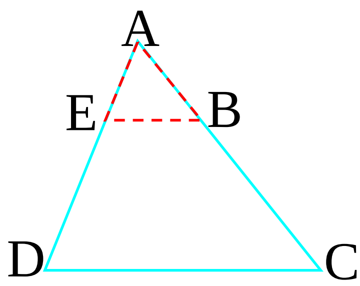
Pour passer de 3 cm à 5 cm, on multiplie par $\frac{5}{3}$.

Le grand cercle est un agrandissement du petit de coefficient $\frac{5}{3}$.

Pour passer de 5 cm à 3 cm, on multiplie par $\frac{3}{5}$.

Le petit cercle est une réduction du grand de coefficient $\frac{3}{5}$.

<u>Propriété</u> d'agrandissement/réduction des triangles admise



Soit ACD un triangle
Si B∈[AC] et E∈[AD] tels que (BE)//(CD)

alors le triangle ABE est une réduction du triangle ACD et le coefficient de réduction est

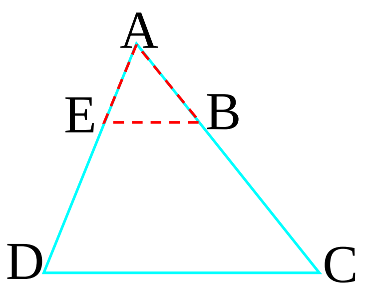
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

alors le triangle ACD est un agrandissement du triangle ABE et le coefficient d'agrandissement est

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{BE}$$

Théorème de Thalès ☞ :

Soit ACD un triangle
Si B∈[AC] et E∈[AD] tels que (BE)//(CD)



alors

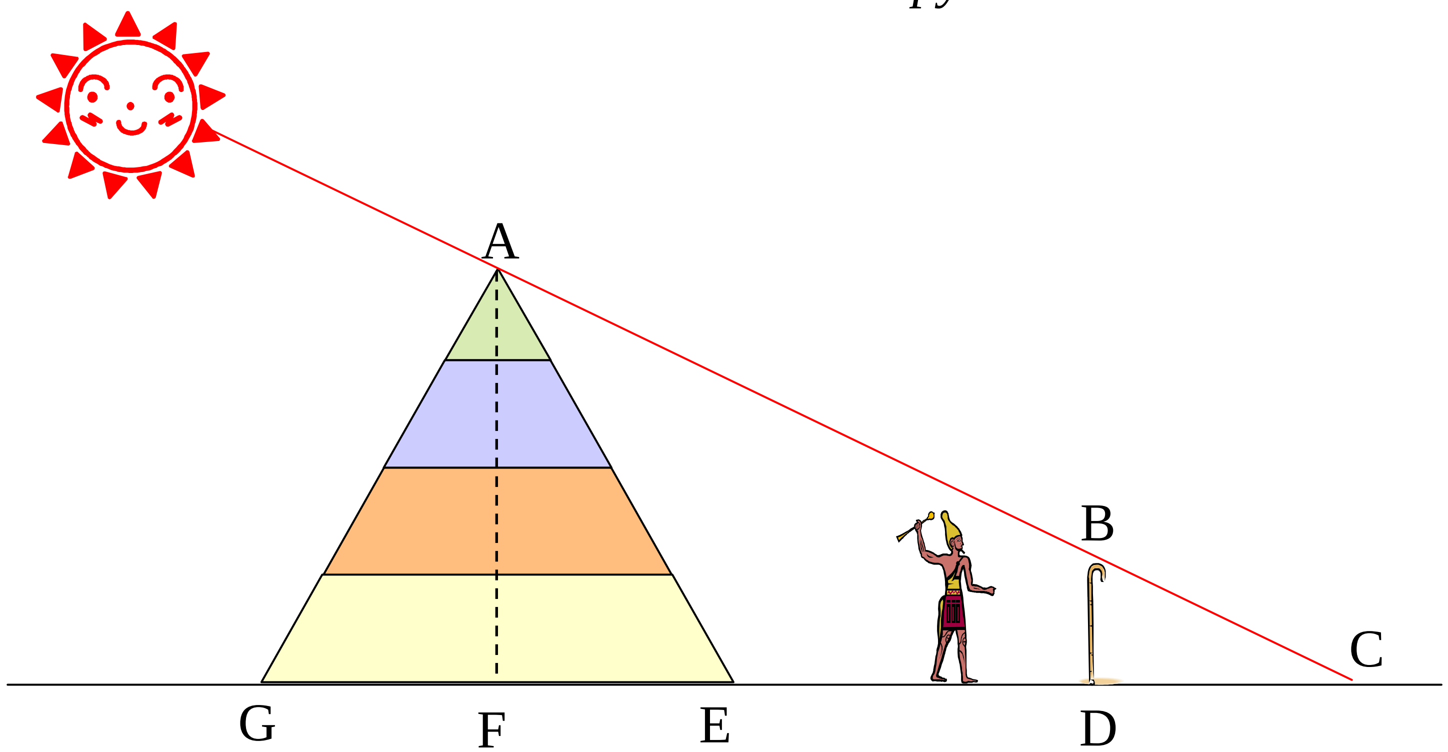
$$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}=\frac{BE}{CD} \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AE}=\frac{CD}{BE}$$

Exemple :

Thalès souhaite découvrir la hauteur de la pyramide ci-contre.

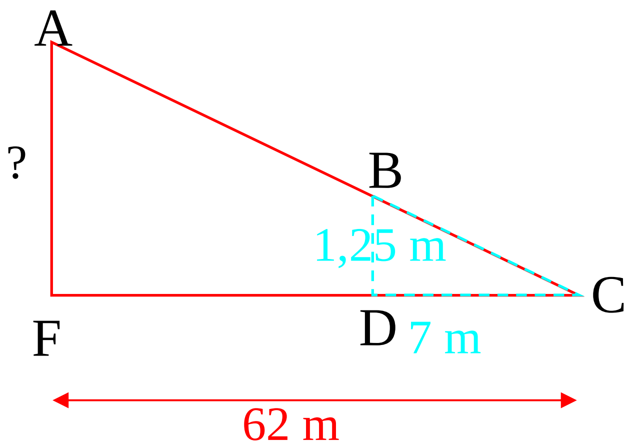
On suppose qu'il a positionné une canne de 1,25 m comme sur la figure ci-dessous. Il a mesuré CD=7m, DE=40m et EG=30 m.

Aide-le à découvrir la hauteur de la pyramide.



Comme F est le milieu de [EG] alors EF = EG÷2 = 30÷2 = 15m.
On suppose que (AF) et (BD) sont verticaux donc parallèles.
Comme C, D, E et F sont alignés dans cet ordre,
alors CF = CD + DE + EF = 7 + 40 + 15 = 62 m.

On obtient donc la figure suivante :



Comme C, B, A et C, D, F sont alignés **et** comme (BD)//(AF) d'après le théorème de Thalès alors

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{AF}{BD}$$

donc $\frac{AC}{BC} = \frac{62}{7} = \frac{AF}{1{,}25}$

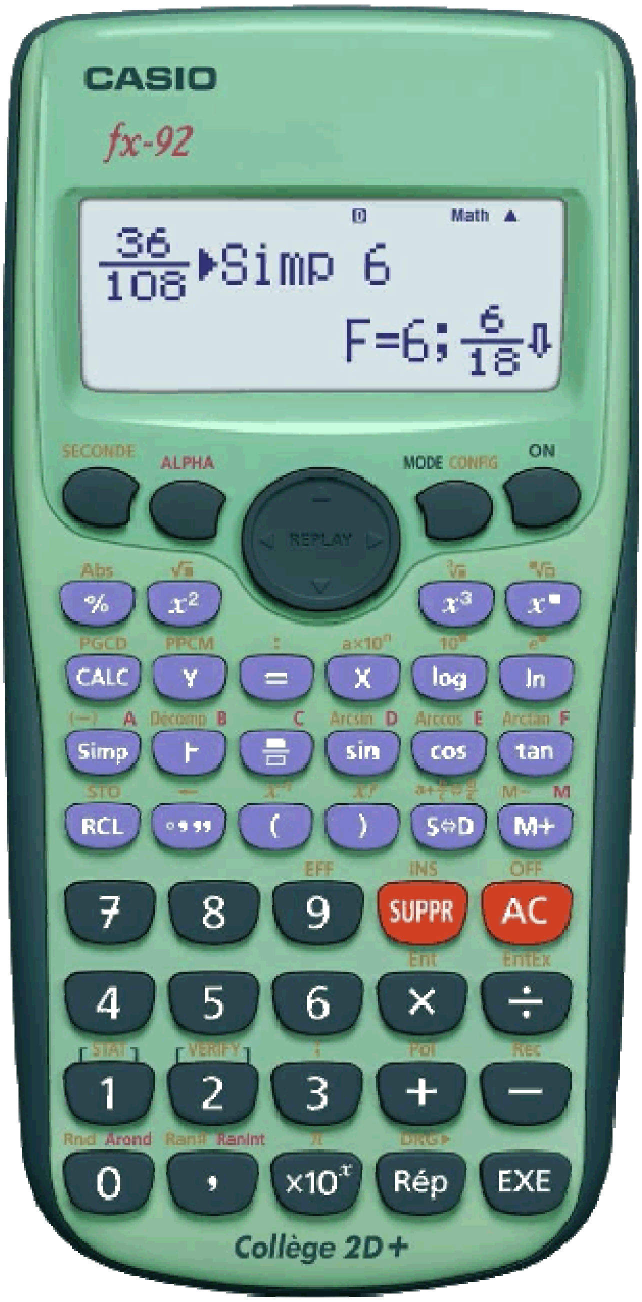
donc $7 \times AF = 62 \times 1{,}25$

donc $7 \times AF = 77{,}5$

$\downarrow \div 7 \qquad \downarrow \div 7$

donc AF $\approx$11,07 m.

La hauteur de la pyramide est $\boxed{\text{d'environ } 11{,}07\text{m}}$.


CASIO
fx-92
Math
36/108 ▶Simp 6
F=6; 6/18
SECONDE
ALPHA
MODE CONFIG
ON
REPLAY
CALC
log
ln
Simp
sin
cos
tan
RCL
S⇔D
M+
7
8
9
SUPPR
AC
4
5
6
×
÷
1
2
3
+
−
0
,
×10ˣ
Rép
EXE
Collège 2D+