

Calcul littéral

François Viète et René Descartes

Définition

On appelle calcul littéral, un calcul dans lequel intervient une lettre (ou plusieurs).

Cette lettre est appelée l'inconnue (la valeur inconnue).

Remarque

On choisit souvent x comme lettre.

Attention à la forme du x : x ou \times ou x .

Dans les équations algébriques, on résout les équations pour obtenir la valeur (s) d'une ou plusieurs inconnue (s). Le mot pour «chose» ou «objet» (chose sans doute inconnus ou objet) en arabe - qui était la principale langue des sciences au cours de la civilisation islamique - est «shei » qui fut traduit par Xei, et réduite à x , et est considéré par certains comme la raison d'utiliser x . Il est également intéressant de noter que «xenos» est le mot grec pour inconnu, étranger, invité, et qui pourraient expliquer les raisons pour que les Européens utilisèrent la lettre x pour désigner les «inconnues» dans les équations algébriques.

Exemple

L'expression $5x^2 + 3x + 7$ est une expression algébrique où l'inconnue est x .

Remarques

Les mathématiciens ont décidé de supprimer le signe de multiplication (\times) dans les cas où il n'est pas indispensable.

Par exemple : $3 \times x = 3x$ ou $5 \times (x + 3) = 5(x + 3)$ mais 3×5 n'est pas noté 35.

x^2 désigne la quantité $x \times x$ et se lit « x au carré ».

x^3 désigne la quantité $x \times x \times x$ et se lit « x au cube ».

Définition

Calculer une expression c'est remplacer l'inconnue par la valeur donnée.

Exemple

Soit E l'expression $0,005 \times x \times x$ qui donne la distance de freinage (en mètres) sur route sèche lorsqu'on roule à la vitesse x (en km/h).

Calculer la distance de freinage lorsque la vitesse est 50 km/h puis lorsque la vitesse est 90 km/h.

Si $x = 50$ alors $E = 0,005 \times 50 \times 50 = 12,5$ m.

Si $x = 90$ alors $E = 0,005 \times 90 \times 90 = 40,5$ m.

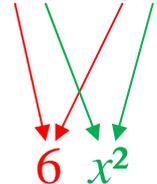
Définition

Réduire une expression c'est écrire une expression égale qui soit plus courte.

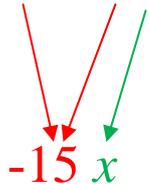
Exemples de réduction de produits

On peut toujours réduire les produits.

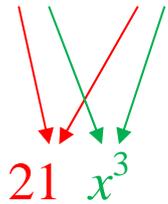
$$2x \times 3x = 2 \times x \times 3 \times x = 2 \times 3 \times x \times x = 6 \times x^2 = 6x^2$$



$$-5 \times 3x = -5 \times 3 \times x = -15 \times x = -15x$$



$$3x^2 \times 7x = 3 \times x \times x \times 7 \times x = 3 \times 7 \times x \times x \times x = 21 x^3$$



Propriété simple distributivité admise

$$k (a + b) = ka + kb \quad \text{pour distribuer}$$

$$ka + kb = k (a + b) \quad \text{pour factoriser}$$

Exemples de distribution (ou développement)

$$5 (x + 4) = 5 \times x + 5 \times 4 = 5x + 20$$

$$7 (x - 5) = 7 \times x - 7 \times 5 = 7x - 35$$

$$-2 (x + 5) = -2 \times x + (-2) \times 5 = -2x - 10$$

$$-4 (x - 7) = -4 \times x - (-4) \times 7 = -4x + 28$$

Exemples de factorisation (on réduit une somme)

$$3x + 2x = 3 \times x + 2 \times x = (3 + 2) \times x = 5 \times x = \boxed{5x}$$

$$15x^2 - 8x^2 = 15 \times x^2 - 8 \times x^2 = (15 - 8) \times x^2 = 7 \times x^2 = \boxed{7x^2}$$

$$\begin{aligned} 15x + 3x^2 + 18x - 7x^2 &= 15x + 18x + 3x^2 - 7x^2 \\ &= 15 \times x + 18 \times x + 3 \times x^2 - 7 \times x^2 = (15 + 18) \times x + (3 - 7) \times x^2 \\ &= \boxed{33x - 4x^2} \end{aligned}$$

$$33x - 5x^2 + 7x + 11x^2 = \boxed{40x + 6x^2}$$

Ne plus écrire

$5x^2 + 3x$ ne peut pas se réduire

Remarque

Dans tous les exercices, on demandera de réduire les expressions (même si cela n'est pas indiqué dans l'énoncé).

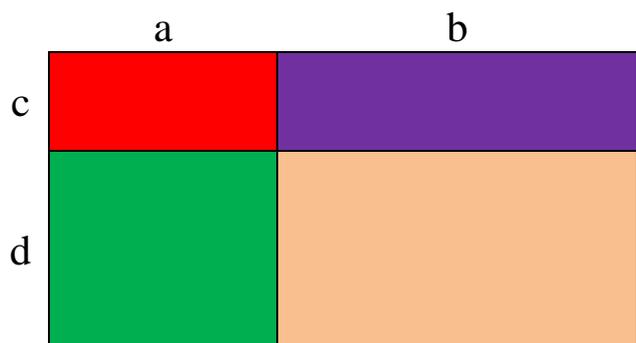
Propriété double distributivité

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Démonstrations

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Simple distributivité Simple distributivité



Exemples

$$(x + 2)(x + 3) = x \times x + x \times 3 + 2 \times x + 2 \times 3 = x^2 + 3x + 2x + 6$$
$$= x^2 + 5x + 6$$

$$(x + 5)(x + 7) = x^2 + 7x + 5x + 35 = x^2 + 12x + 35$$

$$(x + 3)(x - 4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$$

$$(x - 7)(x - 4) = x^2 - 4x - 7x + 28 = x^2 - 11x + 28$$

$$(2x + 3)(5x - 7) = 10x^2 - 14x + 15x - 21 = 10x^2 + x - 21$$

 **ATTENTION à la gestion des parenthèses**

S'il y a un signe « + » devant la parenthèse, on peut supprimer la parenthèse.

$$5x + (3x + 4) = 5x + 3x + 4 = 8x + 4$$

S'il y a un « - » devant la parenthèse cela veut dire que l'on veut prendre l'opposé de ce qu'il y a dans la parenthèse ; on enlève la parenthèse (et la soustraction) et on change tous les signes.

$$7x - (3x - 5) = 7x - 3x + 5 = 4x + 5$$

S'il y a un nombre devant la parenthèse, on utilise la propriété de distributivité.

$$5x + 2(x - 3) = 5x + 2x - 6 = 7x - 6$$

$$7x - 3(x - 5) = 7x - (3x - 15) = 7x - 3x + 15 = 4x + 15$$

$$7x - 3(x - 5) = 7x - 3x + 15 = 4x + 15$$

Exemples complexes

$$A = (2x + 5)(3x + 7) + (5x + 3)(2x + 4)$$

$$A = 6x^2 + 14x + 15x + 35 + 10x^2 + 20x + 6x + 12$$

$$A = 16x^2 + 55x + 47$$

$$B = (2x - 5)(3x + 7) - (5x + 3)(8x - 9)$$

$$B = 6x^2 + 14x - 15x - 35 - (40x^2 - 45x + 24x - 27)$$

$$B = 6x^2 + 14x - 15x - 35 - 40x^2 + 45x - 24x + 27$$

$$B = -34x^2 + 20x - 8$$

$$C = (5x - 2)^2$$

$$C = (5x - 2)(5x - 2)$$

$$C = 25x^2 - 10x - 10x + 4$$

$$C = 25x^2 - 20x + 4$$