Fonctions linéaires et affines - Pourcentages

Définition

Soit p et q deux nombres.

Une fonction est dite **linéaire** si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x$

Une fonction est dite **affine** si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x + q$

Exemples

Fonction	Linéaire ?	Affine ?
$f(x) = 3x$	Oui	Oui car $3x = 3x + 0$
$g(x) = -6x$	Oui	Oui car $-6x = -6x + 0$
$h(x) = 5x + 3$	Non	Oui
$i(x) = 7$	Non	Oui car $7 = 0x + 7$
$j(x) = \cos(x)$	Non	Non
$k(x) = x^2$	Non	Non

Propriété admise

Une situation de proportionnalité de coefficient p

- a une représentation graphique qui est une droite qui passe par l'origine du repère,
- correspond à la fonction linéaire $f(x) = p\,x$.

Soit $f(x) = p\,x + q$ une fonction affine.
Sa représentation graphique est une droite.

Exemple

Gabriel souhaite acheter des fraises pour faire de la confiture. Sur le marché, il a trouvé des fraises de France à 2,5€ le kilogramme.

Le prix des fraises est proportionnel à la masse de fraises.

Le coefficient de proportionnalité est 2,5.

On appelle x la masse de fraises en kilogrammes.

Cela correspond à la fonction linéaire $f(x) = 2,5\ x$.

Marine est plus courageuse. Elle a trouvé un producteur qui lui offre de ramasser ses fraises pour 1,5€ le kilogramme après paiement d'une redevance forfaitaire de 20€.

Le prix des fraises chez ce producteur est donné par la fonction affine $g(x) = 1,5\ x + 20$.

Comment tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine ?

Comme leurs représentations graphiques sont des droites, il suffit de placer 2 points.

Afin de vérifier, il est intéressant d'en placer 3.

On construit donc un tableau de valeur avec 3 points.

Exemple des fraises

$f(x) = 2,5\ x$ $\qquad$ $g(x) = 1,5\ x + 20$

x	0	10	25
$f(x)$	0	25	62,5
$g(x)$	20	35	57,5

Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction affine ?

On cherche les antécédents de a par la fonction affine $f(x) = p\,x + q$

Il suffit de résoudre l'équation $p\,x + q = a$

Exemple des fraises

On cherche combien Marine peut acheter de fraises avec 38€.

On cherche les antécédents de 38 donc les nombres x tels que $g(x) = 38$ donc $1{,}5\,x + 20 = 38$

$$\begin{array}{lll} & 1{,}5\,x + 20 & = 38 \\ \text{donc} & 1{,}5\,x & = 18 \\ \text{donc} & x & = 12 \end{array}$$

Elle peut donc acheter $\boxed{\text{12kg de fraises}}$.

Propriété

Soit $f(x) = p\,x + q$ une fonction affine.

La représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0; q)$.

Le nombre q est appelé ordonnée à l'origine.

Si x augmente de 1 alors $f(x)$ augmente de p.

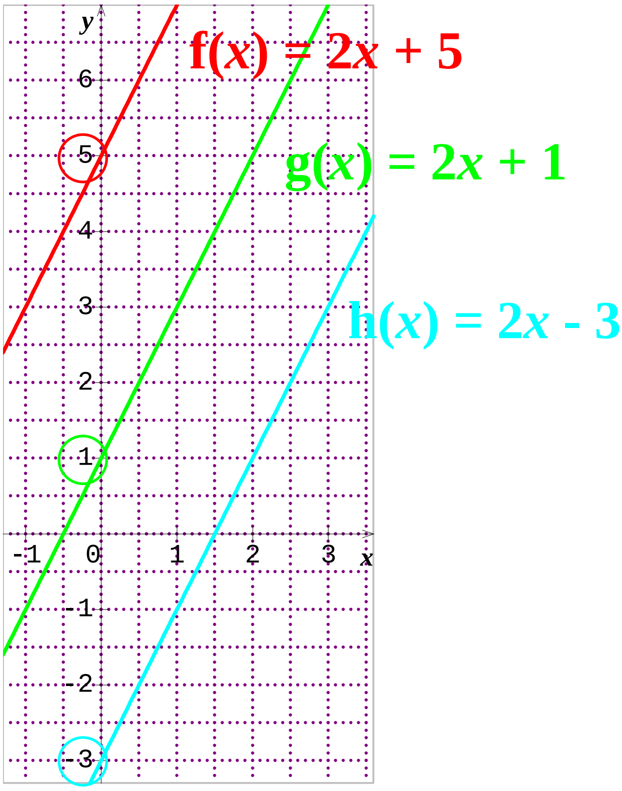
Le nombre p est appelé coefficient directeur

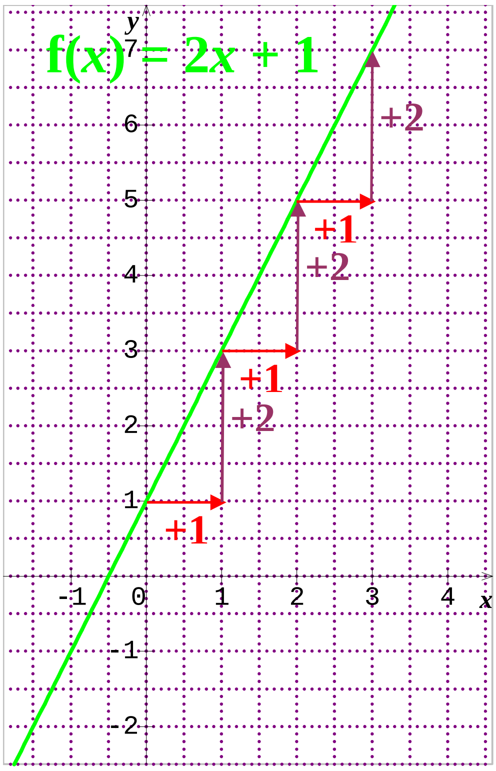
Démonstration

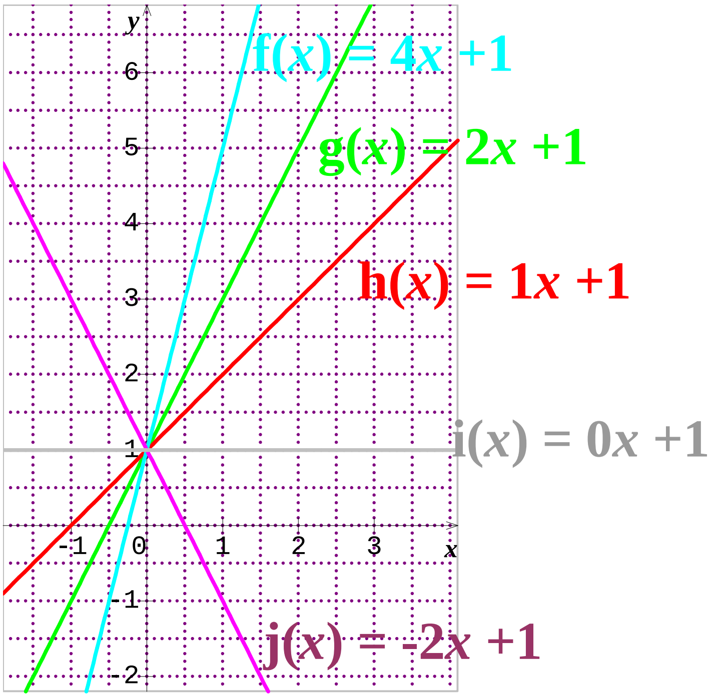
Si $x = 0$ alors $f(x) = f(0) = p \times 0 + q = q$, donc si $x = 0$ alors la représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0 ; q)$.

$f(x + 1) = p\,(x + 1) + q = p\,x + \mathrm{p} + q = p\,x + q + p = f(x) + p$

Donc si x augmente de 1 alors $f(x)$ augmente de p.







<u>Remarque</u>

Deux fonctions qui ont le même coefficient directeur ont des représentations graphiques qui sont parallèles.

Propriété

Soit $f(x) = p\,x + q$ une fonction affine.

Soit x_1 et x_2 deux nombres et $f(x_1)$ et $f(x_2)$ leurs images.

$$p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Démonstration

$f(x_1) = p\,x_1 + q$ $\qquad$ $f(x_2) = p\,x_2 + q$

$f(x_2) - f(x_1) = p\,x_2 + q - (p\,x_1 + q)$

$f(x_2) - f(x_1) = p\,x_2 + q - p\,x_1 - q$

$f(x_2) - f(x_1) = p\,x_2 - p\,x_1$

$f(x_2) - f(x_1) = p\,(x_2 - x_1)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = p$$

Exemple 1

Soit $f(x) = p\,x + q$ une fonction affine tel que $f(2) = 5$ et $f(6) = 21$ leurs images.

Trouver l'expression algébrique de f.

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $p = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ avec $x_1 = 2$, $f(x_1) = 5$, $x_2 = 6$ et $f(x_2) = 21$.

On a $p = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \dfrac{21 - 5}{6 - 2} = \dfrac{16}{4} = 4$

Donc $f(x) = 4x + q$.

Dans l'énoncé On remplace x par 2 dans la formule $f(x) = 4x + q$

↓ ↓

On a $f(2) = 5$ et $f(2) = 4 \times 2 + q$

donc $5 = 4 \times 2 + q$

donc $5 = 8 + q$

donc $-3 = q$

donc $\boxed{f(x) = 4x - 3}$

Exemple 2

Soit A(4 ; 7) et B(6 ; 11) deux points.

Trouver l'expression algébrique de la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points A et B.

Soit C(5 ; 9) et D (8 ; 17)

Les points C et D appartiennent-ils à la droite (AB) ?

Soit f(x) = px + q la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points A et B.

On a f(4) = 7 et f(6) = 11

On a $x_1 = 4$ et $f(x_1) = 7$ et $x_2 = 6$ et $f(x_2) = 11$

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Donc $p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{11 - 7}{6 - 4} = \frac{4}{2} = 2$

Donc f(x) = 2x + q.

On a f(4) = 7 et f(4) = 2 × 4 + q

donc 7 = 2 × 4 + q

donc 7 = 8 + q

donc -1 = q

donc $\boxed{f(x) = 2x - 1}$

f(5) = 2 × 5 – 1 = 9 donc $\boxed{C \in (AB)}$.

f(8) = 2 × 8 – 1 = 15 ≠ 17 donc $\boxed{D \notin (AB)}$.

Soit M (x ; y) un point sur cette droite.

Les coordonnées de ce point vérifient l'équation y = 2x - 1 ; on dit que y = 2x - 1 est l'équation de la droite (AB).

Rappel

Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier la fraction par cette quantité.

Le mot français « de » se traduit en mathématiques par une multiplication.

Exemple

Prendre $\frac{3}{5}$ de 120€, c'est prendre $\frac{3}{5}\times 120=\boxed{72€}$.

Prendre 12% de 45€, c'est prendre $\frac{12}{100}$ de 45€, ce qui revient à prendre $\frac{12}{100}\times 45=\boxed{5,4€}$.

Comment calculer le produit d'une fraction par une quantité ?

$\frac{a}{b}\times c=(a\div b)\times c$ $\frac{a}{b}\times c=(a\times c)\div b$ $\frac{a}{b}\times c=(c\div b)\times a$

Exemple

$\frac{10}{5}\times 7=(10\div 5)\times 7=2\times 7=14$ $\frac{5}{3}\times 6=(5\times 6)\div 3=30\div 3=10$

$\frac{7}{3}\times 15=(15\div 3)\times 7=5\times 7=35$

Propriété

Ajouter p% à une quantité revient à la multiplier par $\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Cela correspond à une application linéaire de coefficient $\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Soustraire p% à une quantité revient à la multiplier par $\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

Cela correspond à une application linéaire de coefficient $\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

Démonstration

Soit Q la quantité.

p% de Q c'est $\frac{p}{100}\times Q$

Si on ajoute p% à Q, on trouve $Q+\frac{p}{100}\times Q = Q\times\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Si on soustrait p% à Q, on trouve $Q-\frac{p}{100}\times Q = Q\times\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

Exemple 1

Paule va en courses. Ce sont les soldes et les prix sont soldés à -15%.

Quel sera le prix soldé d'un gilet dont le prix normal est 74€ ?

Calculons le prix soldé.

$$74\times\left(1-\frac{15}{100}\right)=74\times0,85=62,9$$

Le prix soldé est $\boxed{62{,}90€}$.

Exemple 2

Le taux de TVA est de 33,3%.

a. Le prix HT est de 126 €. Quel est le prix TTC ?

b. Le prix TTC est de 150 €. Quel est le prix HT ?

Le taux de TVA est de 33,3%.

Pour passer du prix HT au prix TTC, on multiplie par $1+\frac{33,3}{100}=1,333$ donc pour passer du prix TTC au prix HT, on divise par 1,333

a. Calculons le prix TTC.

$126 \times 1{,}333 \approx 167{,}96$

Le prix TTC est d'environ $\boxed{167{,}96\ €}$.

b. Calculons le prix HT.

$150 \div 1{,}333 \approx 112{,}53$

Le prix HT est d'environ $\boxed{112{,}53\ €}$.