Le Plus Grand Commun Diviseur

Rappels Critères de divisibilité

- Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).
- Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.
- Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.
- Un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et par 3, donc s'il est pair et si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Définition

Un diviseur commun à deux nombres entiers est un nombre entier qui divise chacun d'eux.

Exemples

☞ 2 est un diviseur commun à 6 et à 10

☞ Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12.

Les diviseurs de 18 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 et 18.

Donc les diviseurs communs à 12 et 18 sont 1 ; 2 ; 3 et 6.

Définition

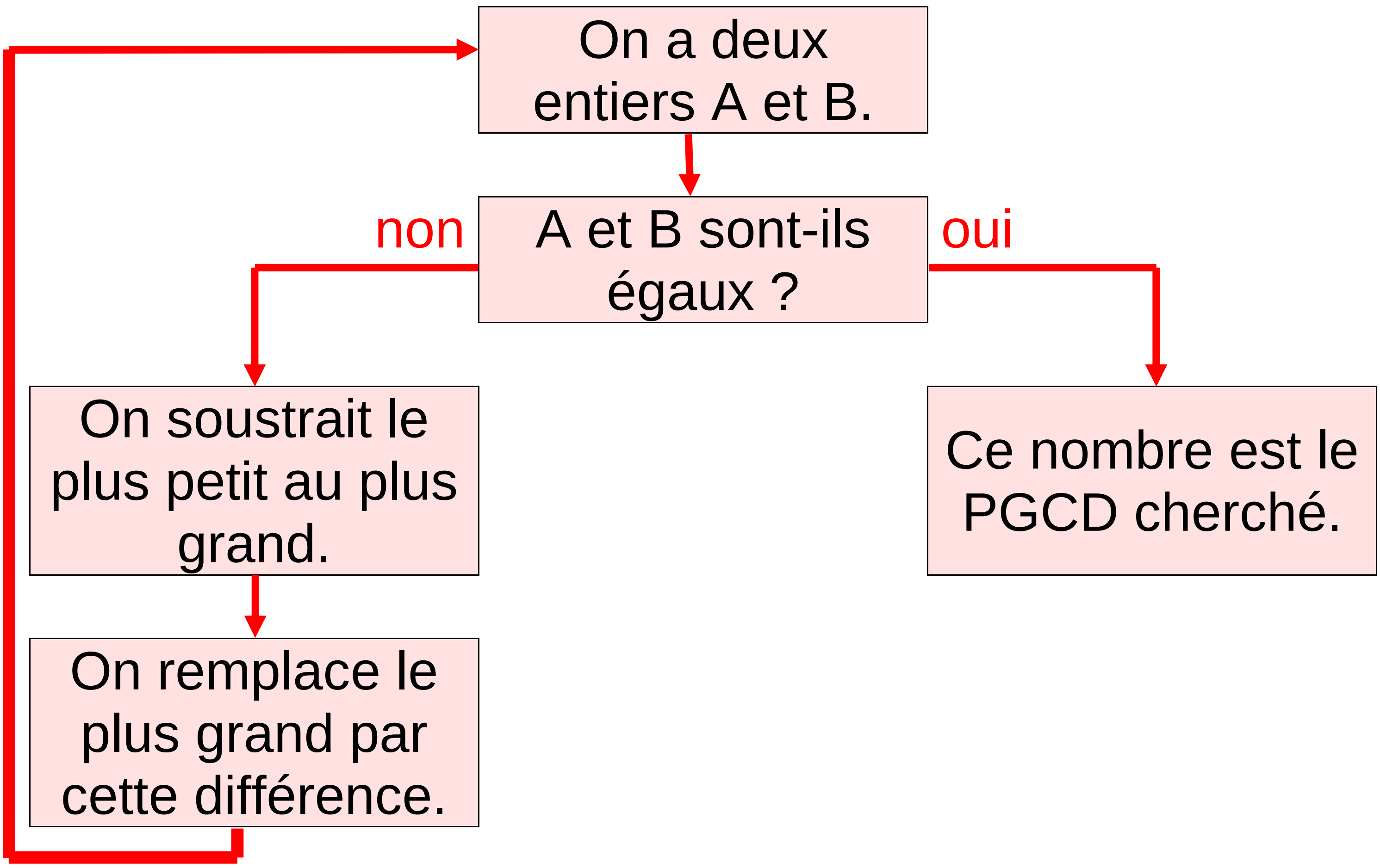
Le plus grand diviseur commun à plusieurs nombres entiers est appelé le plus grand diviseur commun, noté PGCD.

Exemple :

Le PGCD de 12 et 18 est 6.

On note : **PGCD (12 ; 18) = 6**.

Comment trouver le PGCD de deux entiers ? (Méthode par soustractions successives)



Exemples :

☞ Calculons le PGCD de 936 et 624.

936	624
936 – 624 = 312	624
312	624 – 312 = 312

Le PGCD de 936 et 624 est $\boxed{312}$.

☞ Calculons le PGCD de 1449 et 2277.

1449	2277
1449	2277 – 1449 = 828
1449 – 828 = 621	828
621	828 – 621 = 207
621 – 207 = 414	207
414 – 207 = 207	207

Le PGCD de 1449 et 2277 est $\boxed{207}$.

ou $\boxed{\text{PGCD}(1449\ ;\ 2277) = 207}$

Exercices d'application directe :

Calculer les PGCD des nombres suivants : [1]

42 et 75	100 et 75	50, 60 et 80
233 et 377	657 et 963	12456 et 2444

Définition :

Deux nombres entiers sont dits <u>premiers entre eux</u> si leur PGCD vaut 1.

Exemples :

☞ Comme PGCD (233 ; 377) = 1 alors 233 et 377 sont premiers entre eux.

[1] PGCD (42 ; 75) = 3 | PGCD (100 ; 75) = 25 | PGCD (50 ; 60 ; 80) = 10 | PGCD (233 ; 377) = 1 | PGCD (657 ; 963) = 9 PGCD (12456 ; 2444) = 4

☞ Comme PGCD (42 ; 75) = 3 alors 42 et 75 ne sont pas premiers entre eux.

Définition :

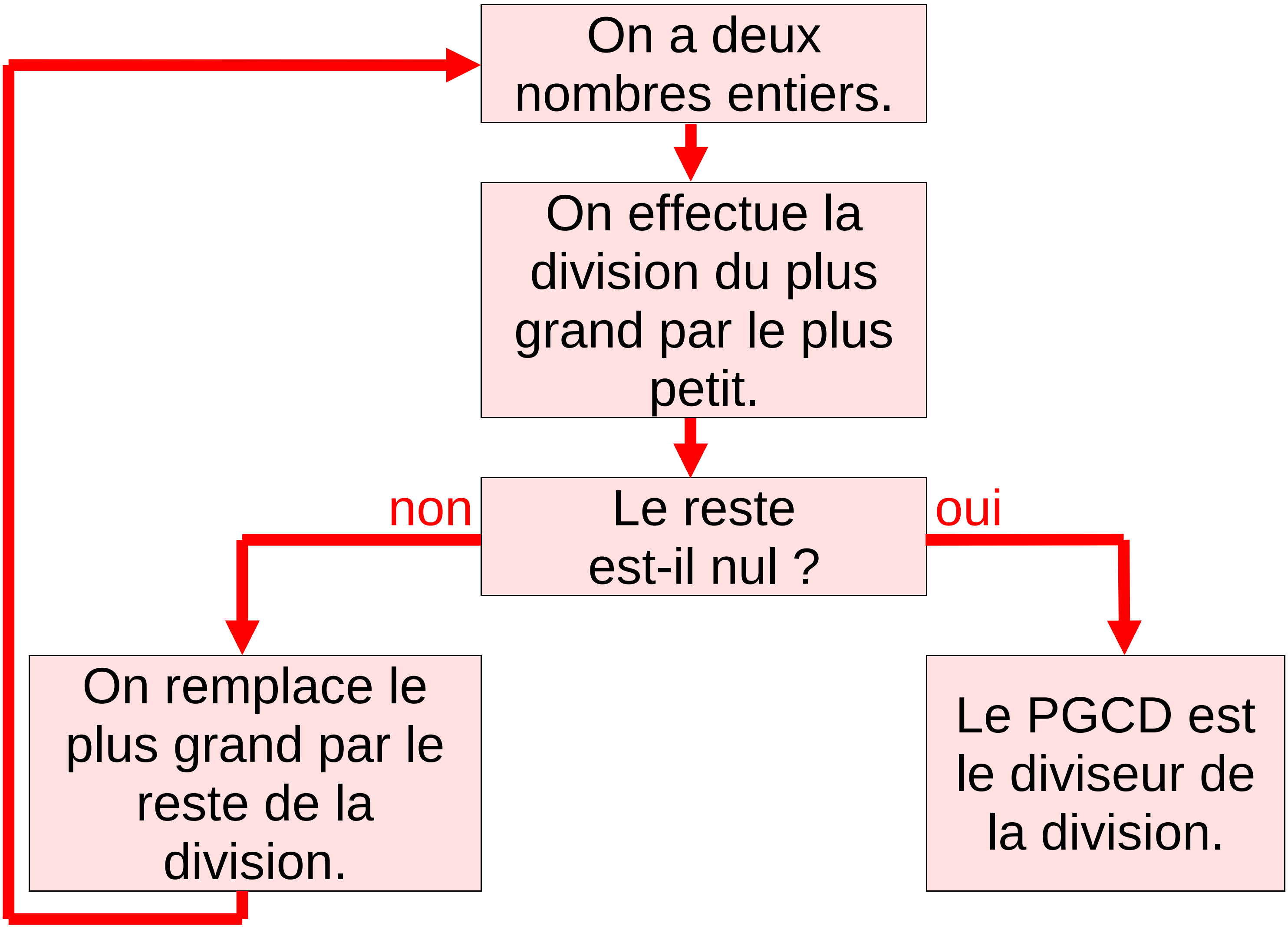
Une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux (donc si leur PGCD vaut 1).

Exemples :

☞ Comme 233 et 377 sont premiers entre eux alors $\frac{233}{377}$ est irréductible.

☞ Comme 42 et 75 ne sont pas premiers entre eux alors $\frac{42}{75}$ est réductible (on peut la simplifier).

Comment trouver le PGCD de deux entiers ? (Algorithme d'Euclide)



Exemple :

☞ Calculons le PGCD de 180 et 170.

Le plus grand nombre

Le plus petit nombre

Dividende	Diviseur	Reste
180	170	10
170	**10**	0

Le reste de la division du dividende par le diviseur

PGCD(180 ; 170) = PGCD(170 ; 10) = 10

Donc le PGCD de 180 et 170 est $\boxed{\mathbf{10}}$.

Comment effectuer une division euclidienne à la calculatrice ?

On veut connaitre le reste de la division euclidienne de 1254 par 46.

- *TI 40 ou CASIO FX 92 COLLEGE*

  On tape 1254 $\boxed{\vdash}$ 46 ou 1254 $\boxed{\div\text{INT}}$ 46 ou 1254 $\boxed{\div\text{R}}$ 46.

  L'affichage donne : $\boxed{\underset{Q}{27}\ \underset{R}{12}}$ ou $\boxed{27\ \underset{R}{}\ 12}$.

  Cela signifie que le quotient est 27 et le reste est 12.

- *Autres calculatrices*

  On tape 1254 $\boxed{\div}$ 46. L'affichage donne : $\boxed{27{,}2608}$. Cela signifie que le quotient entier est 27.

  Pour trouver le reste, on tape le calcul 1254 - 46 × 27. On trouve 12.

Exemples de calculs de PGCD :

☞ Calculons le PGCD de 307 et 315.

Dividende	Diviseur	Reste
315	307	8
307	8	3
8	3	2
3	2	1
2	1	0

Donc le PGCD de 307 et 315 est $\boxed{1}$.

☞ Calculons le PGCD de 1254 et 1300.

Dividende	Diviseur	Reste
1300	1254	46
1254	46	12
46	12	10
12	10	2
10	2	0

Donc le PGCD de 1254 et 1300 est $\boxed{2}$.

☞ Calculons le PGCD de 1254 et 2.

Dividende	Diviseur	Reste
1254	2	0

Donc le PGCD de 2 et 1254 est $\boxed{2}$.

Idée pour la démonstration de la "nouvelle" méthode (elle est d'Euclide et a donc environ 2350 ans) :

La méthode des différences successives "marche" car un diviseur commun à deux nombres est aussi un diviseur de leur différence.

La méthode des divisions successives "marche" car un diviseur commun à deux nombres est aussi un diviseur du reste de la division du plus petit par le plus grand de ces deux nombres, car une division n'est qu'une soustraction itérée.

Pourquoi une deuxième méthode ?

Nombre A.		180	307	1254	1254
Nombre B.		170	315	1300	2
Nombre d'étapes pour le calcul du PGCD de A et B par la méthode	des différences successives	**17**	**43**	**36**	**626**
	d'Euclide	**2**	**5**	**5**	**1**

Exercices d'application directe :

Calculer les PGCD des nombres suivants : [2]

42 et 75	100 et 75	75 et 1250
233 et 373	657 et 963	12456 et 2444

Comment rendre une fraction irréductible ?

Soit la fraction $\frac{a}{b}$ que l'on veut rendre irréductible.

- Si PGCD (a ; b) = 1 alors $\frac{a}{b}$ est irréductible.
- Si PGCD (a ; b) ≠ 1 alors on divise le numérateur et le dénominateur de la fraction par ce PGCD et l'on obtient une fraction irréductible.

Exemples :

☞ $\frac{180}{170} = \frac{18}{17}$ est irréductible car on a divisé le numérateur et le dénominateur de la fraction par leur PGCD, qui est ici 10.

☞ $\frac{180 \div 10}{170 \div 10} = \boxed{\frac{18}{17} \text{ est irréductible}}$

☞ $\frac{307}{315}$ est irréductible car PGCD (307 ; 315) = 1

Propriété (admise)

Les diviseurs communs à deux entiers sont les diviseurs de leur PGCD.

[2] PGCD (42 ; 75) = 3 | PGCD (100 ; 75) = 25 | PGCD (75 ; 1250) = 25 | PGCD (233 ; 373) = 1 | PGCD (657 ; 963) = 9
PGCD (12456 ; 2444) = 4

Exemples :

☞ Comme PGCD (1000 ; 750) = 250 alors les diviseurs communs à 1000 et 750 sont les diviseurs de 250, ce sont donc :
1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 25; 50 ; 125 ; 250

☞ Comme PGCD (233 ; 373) = 1 alors 233 et 373 n'ont que 1 comme diviseur commun.

Exemple de problème avec le PGCD :

Dans la scierie de Paul, il y a des planches de 250 cm et 300 cm. Afin de simplifier ses ventes, Paul souhaite vendre des planches ayant toutes la même longueur, en recoupant les planches qu'il a dans son stock (sans chute). Les dimensions des nouvelles planches seront des entiers.

Quelle peut être la taille maximale de ces planches ?

Comme les planches doivent avoir toutes la même longueur, la longueur d'une planche doit être un diviseur commun à 250 cm et 300 cm.

Comme on veut des planches les plus grandes possibles, la longueur d'une planche sera le PGCD de 250 cm et 300 cm.

Calculons le PGCD de 250 et 300

Dividende	Diviseur	Reste
300	250	50
250	50	0

Donc PGCD (250 ; 300) = 50 donc la taille maximale d'une planche est de $\boxed{\text{50 cm}}$.

Exemple 2 de problème avec le PGCD :

Nelson vient de restaurer une vieille maison et il souhaite carreler sa cuisine. Cette dernière est une pièce rectangulaire de

4,2m par 5,4m. Il souhaite poser des carreaux identiques sans faire aucune découpe.

Dans le magasin, les carreaux disponibles ont tous des dimensions entières en centimètres et sont tous de forme carrée.

Quelle peut être la taille des carreaux et combien doit-il en acheter ?

Comme les carreaux sont des carrés, ils ont la même longueur et la même largeur, donc le côté d'un carreau doit diviser la longueur et la largeur de la cuisine. Le côté d'un carreau est donc un diviseur commun à 420 cm et 540 cm.

Calculons le PGCD de 420 et 540

Dividende	Diviseur	Reste
540	420	120
420	120	60
120	60	0

Donc PGCD (420 ; 540) = 60 donc la taille maximale d'un carreau est 60 cm.

Les tailles possibles pour les carreaux sont les diviseurs de 60, soient : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60.

Voici donc les solutions possibles :

Côté d'un carreau	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	6 cm
Nombre de carreaux	226800	56700	25200	14175	9072	6300

Côté d'un carreau	10 cm	12 cm	15 cm	20 cm	30 cm	60 cm
Nombre de carreaux	2268	1575	1008	567	252	63

Exercices d'application :[3]

1 On veut paver une cour rectangulaire avec des dalles carrées dont les côtés mesurent un nombre entier de centimètres, supérieur à 5 et inférieur à 20. On veut poser uniquement des dalles entières.

Est-ce possible pour une cour de :

a : 5,45 m sur 4,29 m ? **b** : 7,28 m sur 9,75 m ?

2 On répartit en paquets un lot de 161 crayons rouges et un lot de 133 crayons noirs de façon que tous les crayons d'un paquet soient de la même couleur et que tous les paquets contiennent le même nombre de crayons.

a : Combien y a-t-il de crayons dans chaque paquet ?

b : Quel est le nom²bre de paquets de crayons de chaque couleur ?

3 Deux livres ont respectivement 480 et 608 pages. Chacun de ces livres est formé de fascicules, ou "cahiers" qui ont tous un même nombre de pages, compris entre 30 et 50.

a : Quel est le nombre de pages d'un cahier ?

b : Quel est le nombre de cahiers qui composent chacun des livres ?

4 Un chocolatier vient de fabriquer 2622 œufs de Pâques et 2530 poissons en chocolat.

Il souhaite faire des assortiments d'œufs et de poissons de façon que :

- tous les paquets aient la même composition ;
- après mise en paquet, il ne reste ni œuf ni poissons.

Aider ce chocolatier à choisir la composition de chaque paquet ; donner toutes les possibilités.

5 En divisant 29687 et 35312 par un nombre entier *a* supérieur à 100, on trouve comme restes respectifs 47 et 32.

Quel est le nombre *a* et quels sont les quotients de ces deux divisions ?

[3] 1a : impossible | 1b : 13 cm | 2a : 7 | 2b : rouges=23 et noirs=19 | 3a : 32 pages | 3b : 15 et 19 | 5 : a=120 ; 247 et 294

4 :

Nb paquets	46	23	2	1
Nb œufs	57	114	1311	2622
Nb poissons	55	110	1265	2530