

Inéquations et problèmes

Définition

Une inéquation est une relation liant deux expressions algébriques séparées par un signe d'inégalité : $<$, $>$, \leq , ou \geq .

\leq signifie « inférieur ou égal »

\geq signifie « supérieur ou égal »

Exemples

$$2x + 5 > 3(x - 7)$$

$$5x - 2 < 2x + 7$$

$$2x - 3 \leq x + 4$$

$$x + 4 \geq 3x - 5$$

Définition

Résoudre une inéquation c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à l'inconnue pour que l'inégalité soit vraie.

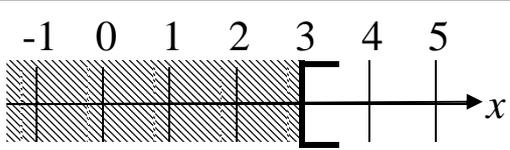
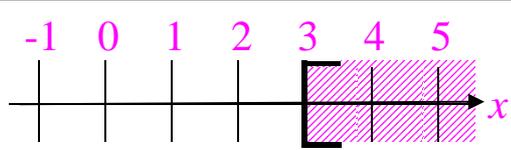
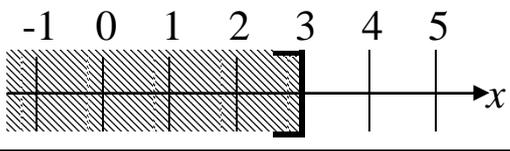
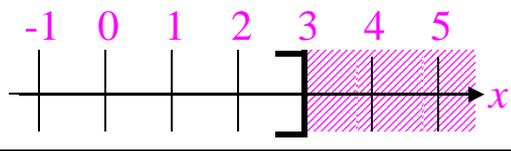
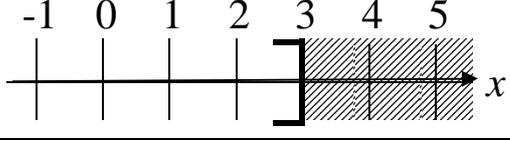
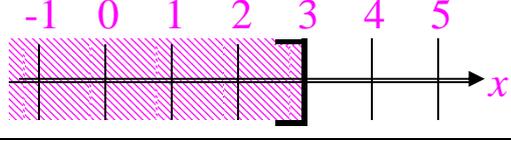
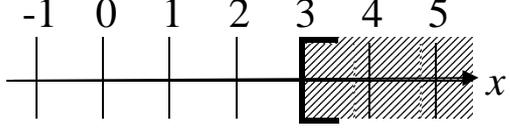
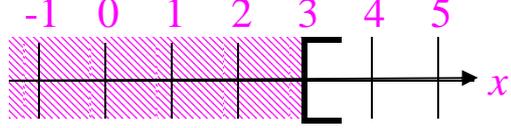
Exemple

L'inéquation $x < 5$ admet pour solutions tous les nombres strictement inférieurs à 5.

Représentation graphique des solutions d'une inéquation

Selon les exercices, on demandera de hachurer l'ensemble des solutions ou de hachurer l'ensemble des points qui ne sont pas solutions.

Si rien n'est précisé dans l'énoncé à ce sujet, il faudra hachurer les solutions.

	<i>Les solutions sont hachurées</i>	<i>Les points hachurés ne sont pas solutions</i>
$x < 3$		
$x \leq 3$		
$x > 3$		
$x \geq 3$		

Pour préciser si le point limite (ici 3) est solution, on place un crochet, tourné vers :

- les solutions si l'inégalité est large (\leq ou \geq)
- les points qui ne sont pas solutions si l'inégalité est stricte ($<$ ou $>$).

Propriété admise

Les nombres relatifs $a \times b$ et $a \times c$ sont :

- dans le même ordre que b et c si a est strictement positif
- dans l'ordre inverse si a est strictement négatif.

Exemples

$$2 < 5 \text{ et } 2 \times 7 < 5 \times 7$$

7 est strictement positif, on ne change pas l'ordre

$$78 \geq 25 \text{ et } 78 \times 13 \geq 25 \times 13$$

13 est strictement positif, on ne change pas l'ordre

$$5 < 12 \text{ et } 5 \times (-4) > 12 \times (-4)$$

-4 est strictement négatif, on change l'ordre

Propriété admise

Pour résoudre une inéquation, on peut (cela ne change pas les solutions) :

1. Additionner (ou soustraire) à chaque membre de l'inéquation une même expression.
2. Multiplier (ou diviser) chaque membre de l'inéquation par une même expression non nulle.



MAIS, si on multiplie (ou divise) par une expression négative, il faut INVERSER le sens de l'inéquation.

Pour résoudre une équation, on peut :

1. Additionner (ou soustraire) à chaque membre de l'équation une même expression.
2. Multiplier (ou diviser) chaque membre de l'équation par une même expression non nulle.

Exemples

$$x + 5 < 3$$

$$\downarrow -5 \quad \downarrow -5$$

$$\text{donc } x < -2$$

Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à -2.

$$S =] -\infty ; -2 [$$

$$x - 4 > 7$$

$$\downarrow +4 \quad \downarrow +4$$

$$\text{donc } x > 11$$

Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à 11.

$$S =] 11 ; +\infty [$$

$$2x \leq 12$$

$$\downarrow \div 2 \quad \downarrow \div 2$$

$$\text{donc } x \leq 6$$

Les solutions sont les nombres inférieurs ou égaux à 6.

$$S =] -\infty ; 6]$$

$$-3x \leq 15$$

$$\downarrow \div (-3) \quad \downarrow \div (-3)$$

$$\text{donc } x \geq -5$$

On a divisé par un nombre négatif (-3), donc on inverse le sens de l'inéquation.

Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à -5.

$$S = [-5 ; +\infty [$$

Remarque

Pour résoudre une inéquation, on commence par simplifier l'écriture algébrique de chacun des membres, puis on isole les inconnues dans un membre.

Astuce

Afin de ne pas avoir à multiplier (ou diviser) par une quantité négative, il peut être intéressant de "passer" les inconnues du côté où il y en a le plus.

En faisant ainsi, on n'a pas à se soucier du changement éventuel de sens de l'inégalité.

Exemples

$$2x + 5 > 3(x - 7)$$

$$\text{donc } 2x + 5 > 3x - 21$$

$$\downarrow -2x \quad \downarrow +21 \quad \downarrow -2x \quad \downarrow +21$$

$$\text{donc } 26 > x$$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres strictement inférieurs à 26.

$$S =] -\infty ; 26 [$$

$$x + 4 \leq 3x - 5$$

$$\downarrow -3x \quad \downarrow -4 \quad \downarrow -3x \quad \downarrow -4$$

$$\text{donc } -2x \leq -9$$

$$\downarrow \div (-2) \quad \downarrow \div (-2)$$

$$\text{donc } x \geq +4,5$$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres supérieurs ou égaux à 4,5.

$$S = [4,5 ; +\infty [$$

Exemple de problème

Paul a déjà eu 4 notes de français : 10, 12, 7 et 9.

Quel doit être sa prochaine note, s'il veut avoir plus de 10 de moyenne ?

Soit x sa prochaine note.

$$\frac{10+12+7+9+x}{5} > 10$$

$$\text{donc } \frac{38+x}{5} > 10$$

$$\downarrow \times 5 \quad \downarrow \times 5$$

$$\text{donc } 38 + x > 50$$

$$\downarrow -38 \quad \downarrow -38$$

$$\text{donc } x > 12$$

Il doit avoir plus de 12.

Exemple de problème n° 2 :

Patrick veut louer une voiture pour ses vacances.

L'entreprise A propose un tarif de 0,5 € par kilomètre.

L'entreprise B propose un tarif de 0,3 € par kilomètre, mais avec une prise en charge de 10 €.

Quel est le nombre de kilomètres parcourus pour lequel le tarif A est plus avantageux que le tarif B ?

Soit x le nombre de kilomètres parcourus.

Facultatif Le prix avec le tarif A est $0,5x$

Le prix avec le tarif B est $10 + 0,3x$

$$0,5x < 10 + 0,3x$$

$$\downarrow -0,3x \quad \downarrow -0,3x$$

$$\text{donc } 0,2x < 10$$

$$\downarrow \div 0,2 \quad \downarrow \div 0,2$$

$$\text{donc } x < 50$$

Le tarif A est le plus avantageux si l'on parcourt moins de 50
kilomètres.