

Equations du premier degré à une inconnue / Problèmes

Identités remarquables

1 - Equations du premier degré à une inconnue.

Définition : Une équation

$$\underbrace{5x + 5}_{1^{\text{er}} \text{ membre}} = \underbrace{3x - 17}_{2^{\text{ème}} \text{ membre}}$$

Remarque :

Lorsque l'on a une équation, le signe d'égalité ne signifie pas que les deux membres sont identiques et sont deux écritures différentes d'une même expression algébrique.

Le signe d'égalité signifie que pour certaines valeurs numériques données aux inconnues, les deux membres seront égaux.

Définition :

Résoudre une équation c'est trouver par quelle(s) valeur(s) numérique(s) il faut remplacer l'inconnue pour que l'égalité entre les deux membres soit vraie.

Exemples :

Si on reprend l'équation $5x + 5 = 3x - 17$, on peut chercher quelle(s) valeur(s) vont rendre l'égalité vraie.

☞ Testons si 2 est une solution de l'équation :

$$\text{Si } x = 2 \text{ alors } 5x + 5 = 5 \times 2 + 5 = 15.$$

$$\text{Si } x = 2 \text{ alors } 3x - 17 = 3 \times 2 - 17 = -11.$$

Comme $15 \neq -11$ alors 2 n'est pas solution de l'équation

$$5x + 5 = 3x - 17.$$

☞ Testons si -4 est une solution de l'équation :

$$\text{Si } x = -4 \text{ alors } 5x + 5 = 5 \times (-4) + 5 = -15.$$

$$\text{Si } x = -4 \text{ alors } 3x - 17 = 3 \times (-4) - 17 = -29.$$

Comme $-15 \neq -29$ alors -4 n'est pas solution de l'équation

$$5x + 5 = 3x - 17.$$

☞ Testons si -11 est une solution de l'équation :

$$\text{Si } x = -11 \text{ alors } 5x + 5 = 5 \times (-11) + 5 = -50.$$

$$\text{Si } x = -11 \text{ alors } 3x - 17 = 3 \times (-11) - 17 = -50.$$

Comme $-50 = -50$ alors -11 est une solution de l'équation

$$5x + 5 = 3x - 17.$$

Remarque :

Chercher une solution en testant toutes les valeurs numériques peut être très long. Il est néanmoins intéressant de savoir tester si une valeur est une solution (*ne serait-ce que pour vérifier les calculs*).

Définition :

On appelle équation du premier degré à une inconnue, une équation dans laquelle n'intervient qu'une inconnue et l'ordre de chacun des membres est 1.

Propriété : admise

Une équation du premier degré à une inconnue a : zéro, une seule ou une infinité de solutions.

Exemples :

Equation n'ayant pas de solution $2x + 3 = 2x + 5$	Equation ayant une seule solution $5x + 5 = 3x - 17$	Equation ayant une infinité de solutions $2 \times (x + 5) - 2 = 2x + 8$
<i>On ne peut pas trouver de valeur numérique pour laquelle l'égalité serait vraie. On peut tester tous les nombres, il n'y a pas de solution.</i>	<i>La solution de cette équation est -11. On peut tester toutes les autres valeurs, l'égalité ne serait pas vraie.</i>	<i>Quelque soit la valeur numérique par laquelle on remplace x, l'égalité sera vraie.</i>

Remarque :

Dans les exercices de collège, (presque toutes) les équations auront une solution unique.

Propriété admise

On ne change pas les solutions d'une équation si :

1. On additionne (ou soustrait), une même expression aux deux membres de l'équation.
2. On multiplie (ou divise) les deux membres de l'équation par une même expression NON NULLE.

Astuce importante

Pour résoudre une équation, on commence par regrouper les inconnues dans le même membre en utilisant le point 1 de la propriété précédente. Il peut être intéressant de les regrouper dans le membre où il y en a le "plus" (on évite des valeurs négatives ...).

On utilise le point 2 de la propriété précédente pour trouver la valeur de l'inconnue.

Exemple :

☞ Résoudre l'équation $2x + 5 = 6x + 7$.

☞ $2x + 5 = 6x + 7$ *On réécrit l'équation*

donc $-2 = 4x$

*On a soustrait $2x$ à chaque membre.
On a soustrait 7 à chaque membre.*

donc $-1/2 = x$

On divise chaque membre par 4 .

Testons si $-1/2$ est solution de l'équation :

Si $x = -1/2$ alors $2x + 5 = 2 \times (-1/2) + 5 = 4$. *On remplace dans le membre de gauche.*
et $6x + 7 = 6 \times (-1/2) + 7 = 4$. *On remplace dans le membre de droite.*

Donc la solution de l'équation $2x + 5 = 6x + 7$ est $- 1/2$.

On peut aussi noter : $S = \{-1/2\}$

2 - Problèmes.

Exemple de problème :

Thomas pense à un nombre entier naturel. S'il lui ajoute l'entier suivant, leur somme vaut 117.

A quel nombre a-t-il pensé ?

Méthode pour résoudre un problème :

<u>Etape 1 :</u> Expliciter l'inconnue.	Soit x le nombre auquel Thomas a pensé.	Il suffit de prendre la question dans l'énoncé et de donner un nom à l'inconnue correspondante.
<u>Etape 2 :</u> Ecrire l'équation	$x + (x + 1) = 117$	C'est l'étape la plus difficile. Voir la fiche d'exercices pour s'entraîner.
<u>Etape 3 :</u> Résoudre l'équation.	$\begin{array}{r} \text{donc } 2x + 1 = 117 \\ \quad \quad -1 \quad -1 \\ \hline \text{donc } 2x = 116 \\ \quad \quad \div 2 \quad \div 2 \\ \hline \text{donc } x = 58 \end{array}$	C'est l'étape la plus longue.
<u>Etape 4 :</u> Répondre à la question.	Donc Thomas a pensé au nombre 58 .	L'étape à ne pas oublier !
<u>Etape 5 :</u> Vérification.	Le nombre suivant est $58+1 = 59$. Or $58 + 59 = 117$, donc 58 est bien le nombre cherché.	INDISPENSABLE

3 – Développer - Identités remarquables

Propriété de double distributivité admise

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples

$$(x + 3)(x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = \boxed{x^2 + 5x + 6}$$

$$(x + 3)(x - 2) = x^2 - 2x + 3x - 6 = \boxed{x^2 + x - 6}$$

$$(x - 3)(x - 2) = x^2 - 2x - 3x + 6 = \boxed{x^2 - 5x + 6}$$

$$(2x + 3)(5x - 7) = 10x^2 - 14x + 15x - 21 = \boxed{10x^2 + x - 21}$$

$$\begin{aligned} & (5x + 4)(2x - 5) + (3x + 7)(5x - 2) \\ &= 10x^2 - 25x + 8x - 20 + 15x^2 - 6x + 35x - 14 \\ &= 10x^2 - 17x - 20 + 15x^2 + 29x - 14 \\ &= \boxed{25x^2 + 12x - 34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (3x - 7)(5x - 4) - (5x - 8)(6x - 4) \\ &= 15x^2 - 12x - 35x + 28 - (30x^2 - 20x - 48x + 32) \\ &= 15x^2 - 47x + 28 - (30x^2 - 68x + 32) \\ &= 15x^2 - 47x + 28 - 30x^2 + 68x - 32 \\ &= \boxed{-15x^2 + 21x - 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (8x - 2)(5x + 7) - 5(5x + 4)(2x - 8) \\ &= 40x^2 + 56x - 10x - 14 - 5(10x^2 - 40x + 8x - 32) \\ &= 40x^2 + 46x - 14 - 5 \times (10x^2 - 32x - 32) \\ &= 40x^2 + 46x - 14 - 50x^2 + 160x + 160 \\ &= \boxed{-10x^2 + 206x + 146} \end{aligned}$$

Propriété : 1^{ère} identité remarquable

♥ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

+ le double produit la somme des carrés

Démonstration

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemples d'utilisation pour développer

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = \boxed{x^2 + 6x + 9}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$

$$(t + 5)^2 = t^2 + 2 \times t \times 5 + 5^2 = \boxed{t^2 + 10t + 25}$$

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 5 + 5^2 = \boxed{9x^2 + 30x + 25}$$

Propriété : 2^{ème} identité remarquable

♥ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- le double produit la somme des carrés

Démonstration

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemples d'utilisation pour développer

$$(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = \boxed{x^2 - 6x + 9}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$$

$$(t - 5)^2 = t^2 - 2 \times t \times 5 + 5^2 = \boxed{t^2 - 10t + 25}$$

$$(3x - 5)^2 = (3x)^2 - 2 \times (3x) \times 5 + 5^2 = \boxed{9x^2 - 30x + 25}$$

Propriété : 3^{ème} identité remarquable

$$♥ \quad (a + b) (a - b) = a^2 - b^2$$

ou

$$♥ \quad (a - b) (a + b) = a^2 - b^2$$

Démonstration

$$(a + b) (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Exemples d'utilisation pour développer

$$(x + 3) (x - 3) = x^2 - 3^2 = \boxed{x^2 - 9}$$

$$(a + b) (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + 7) (x - 7) = x^2 - 7^2 = \boxed{x^2 - 49}$$

$$(5x + 9) (5x - 9) = (5x)^2 - 9^2 = \boxed{25x^2 - 81}$$

$$(x - 8) (x + 8) = x^2 - 8^2 = \boxed{x^2 - 64}$$

$$⚠ (x + 3) (x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = \boxed{x^2 + 6x + 9}$$

$$⚠ (x + 3) (x - 4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = \boxed{x^2 - x - 12}$$