

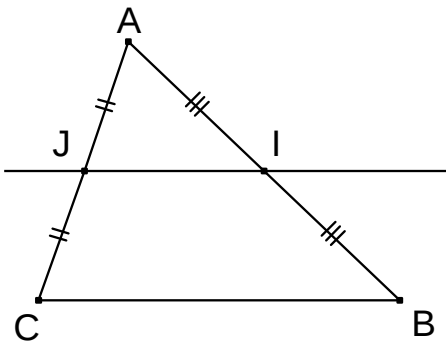
La droite des milieux

Définition

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est appelée la droite des milieux.

Propriété de la droite des milieux

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au troisième côté.



Soit ABC un triangle.

Si I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$
alors $(IJ) \parallel (BC)$.

Remarque

Cette propriété peut s'utiliser si l'on a :

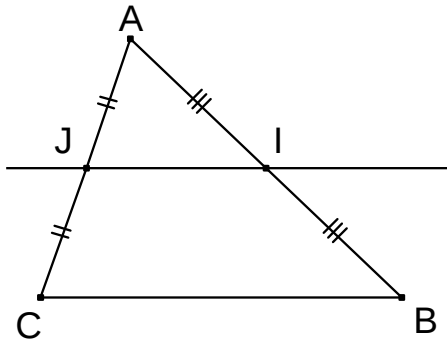
- un triangle,
- les milieux de deux côtés.

Cette propriété « sert » à prouver que

- deux droites sont parallèles.

Propriété complémentaire de la droite des milieux

Dans un triangle, le segment qui relie le milieu de deux côtés mesure la moitié du troisième côté.



Soit ABC un triangle.

Si I et J sont les milieux de [AB] et [AC]
alors $IJ = BC \div 2$ ou $BC = 2 \times IJ$.

Remarque

Cette propriété peut s'utiliser si l'on a :

- un triangle,
- les milieux de deux côtés.

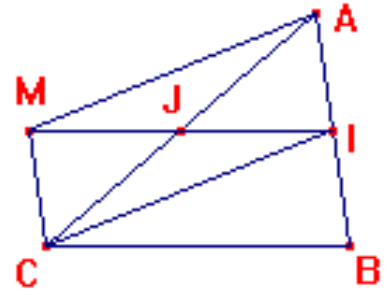
Cette propriété « sert » à calculer

- une longueur.

Démonstrations

On suppose ABC est un triangle, que I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$, que M est le symétrique de I par rapport à J .

On veut prouver que $IJ = BC/2$ et $(IJ) \parallel (BC)$.



- 1 Comme M est le symétrique de I par rapport à J , d'après la définition de la symétrie centrale, alors J est le milieu de $[IM]$.
- 2 Comme J est le milieu de $[AC]$ et $[IM]$, d'après la propriété "si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme", alors $AMCI$ est un parallélogramme.
- 3 Comme $AMCI$ est un parallélogramme, d'après la propriété P1 "si un quadrilatère est un parallélogramme alors il a deux côtés de même longueur et parallèles", alors $(AI) \parallel (MC)$ et $AI = MC$.
- 4 Comme $I \in (AB)$ et $(AI) \parallel (MC)$ alors $(BI) \parallel (MC)$.
- 5 Comme I est le milieu de $[AB]$, d'après la définition du milieu, alors $AI = IB$.
- 6 Comme $AI = MC$ et $AI = IB$ alors $MC = IB$.
- 7 Comme $(BI) \parallel (MC)$ et $MC = IB$, d'après la propriété "si un quadrilatère a deux côtés de même longueur et parallèles alors c'est un parallélogramme", alors $MIBC$ est un parallélogramme.
- 8 Comme $MIBC$ est un parallélogramme, d'après la propriété P1, alors $(MI) \parallel (BC)$ et $MI = BC$.
- 9 Comme $J \in (MI)$ et $(MI) \parallel (BC)$ alors $(IJ) \parallel (BC)$ (propriété de la droite des milieux).
- 10 Comme J est le milieu de $[IM]$, d'après la définition du milieu, alors $IJ = IM/2$.
- 11 Comme $MI = BC$ et $IJ = MI/2$ alors $IJ = BC / 2$ (propriété complémentaire de la droite des milieux).

Ce Qu'il Fallait Démontrer

Rappels et compléments sur les propriétés et réciproques en mathématiques.

Une **propriété** s'écrit sous la forme
SI conditions **ALORS** conclusion.

Par exemple
SI je vois qu'il pleut dehors **ALORS** je prends mon parapluie.

On dit qu'une propriété est **réciproque** d'une l'autre si on a inversé la(les) condition(s) et la conclusion.
SI conclusion **ALORS** conditions

Par exemple
SI je prends mon parapluie **ALORS** je vois qu'il pleut dehors.

ATTENTION : une propriété peut être vraie et sa réciproque fausse.

On dit qu'une propriété est **contraposée** d'une autre si on a pris la négation des conditions et conclusion et qu'on les a inversées.
SI non conclusion **ALORS** non conditions.

Par exemple
SI je ne prends mon parapluie **ALORS** je vois qu'il ne pleut pas dehors.

ATTENTION : si une propriété est vraie, sa contraposée l'est aussi.

On appelle **théorème** une propriété particulière à laquelle les mathématiciens attachent une grande importance.

Compléments de logique.

ATTENTION : le mot « ou » n'a pas le même sens en français et en mathématiques.

En français, le mot « ou » signifie qu'on a le choix entre deux événements qui ne peuvent pas se produire en même temps ; on peut le remplacer par « ou bien ».

En mathématiques, le mot « ou » peut remplacer le « ou bien » et le « et » du français.

Par exemple :

En français, lorsque je dis « il pleut ou il y a du vent » il y a 2 possibilités distinctes :

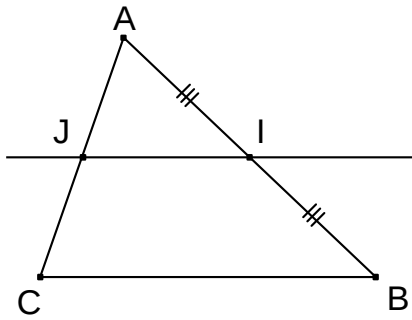
- soit il pleut,
- soit il y a du vent.

En mathématiques, lorsque je dis « il pleut ou il y a du vent » il y a 3 possibilités distinctes :

- soit il pleut,
- soit il y a du vent,
- soit il pleut et, en même temps, il y a du vent.

Propriété réciproque de la droite des milieux - admise

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté en étant parallèle à un second côté passe par le milieu du troisième côté.



Soit ABC un triangle.

Si I le milieu de $[AB]$ et J est le point de $[AC]$ tel que $(IJ) \parallel (BC)$ alors J est le milieu de $[AC]$.

Remarque

Cette propriété peut s'utiliser si l'on a :

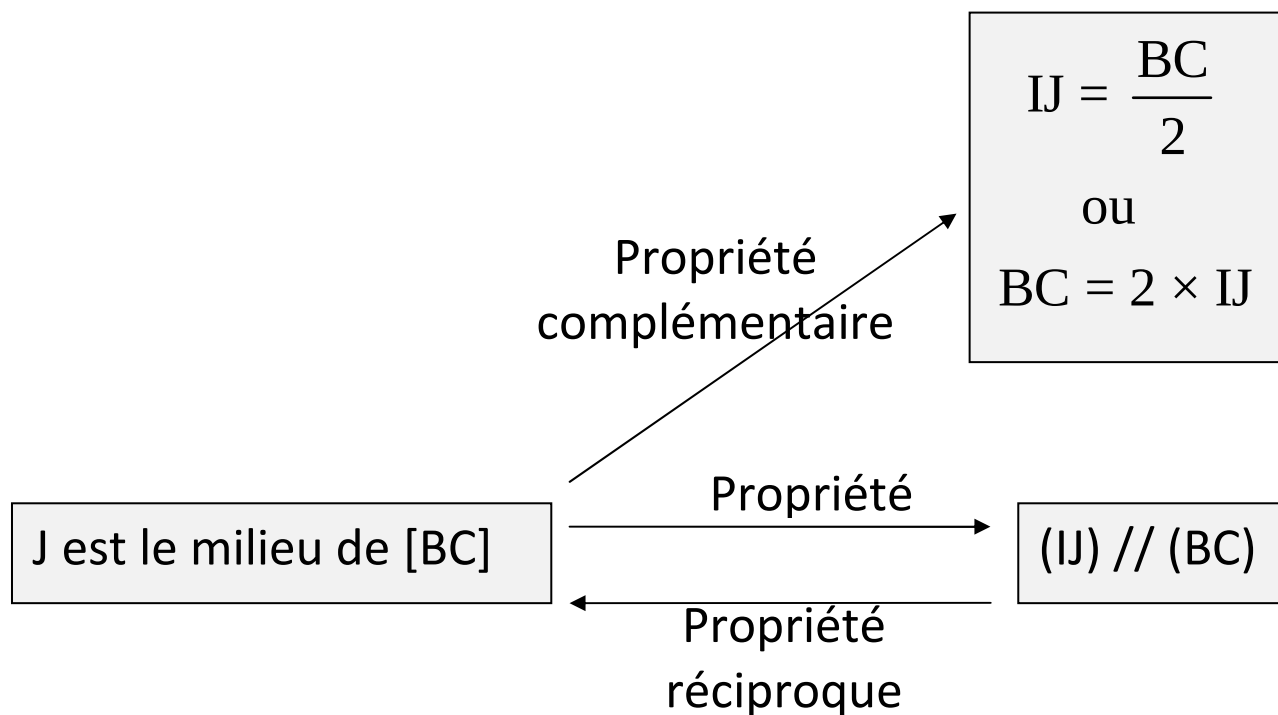
- un triangle,
- le milieu d'un côté,
- une droite qui passe par ce milieu en étant parallèle à un second côté.

Cette propriété « sert » à prouver

- qu'un point est le milieu d'un segment.

Résumé des 3 propriétés

ABC est un triangle
I est le milieu de [AB]



RAPPELS

