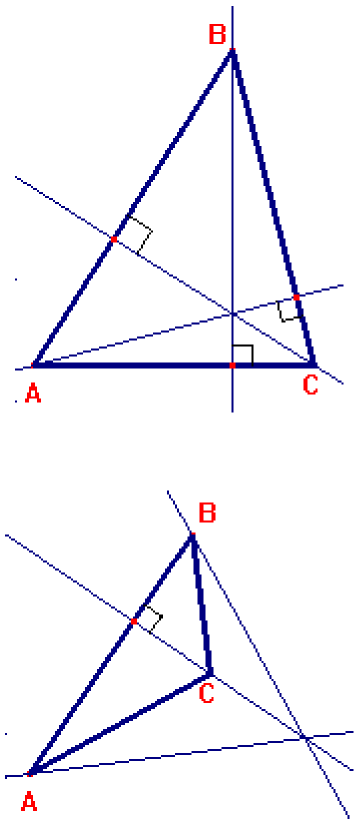
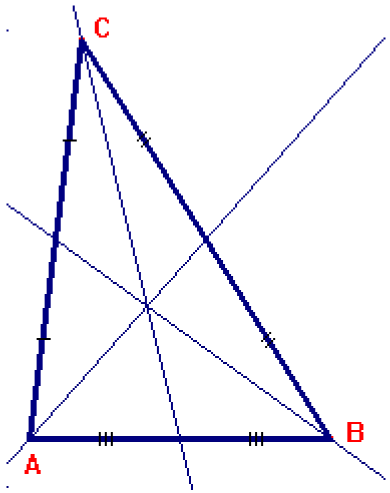
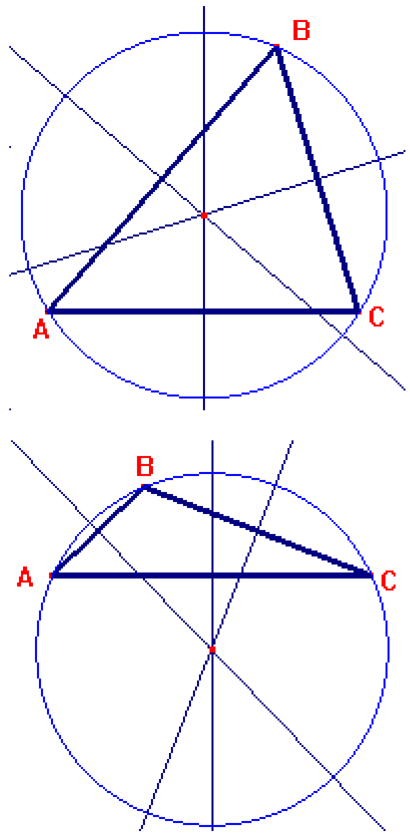
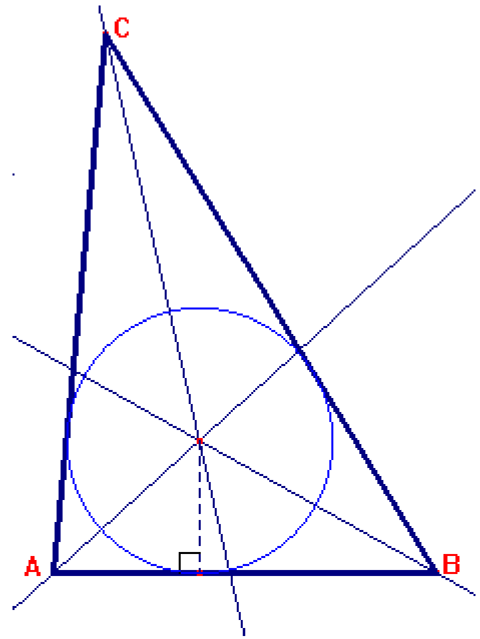
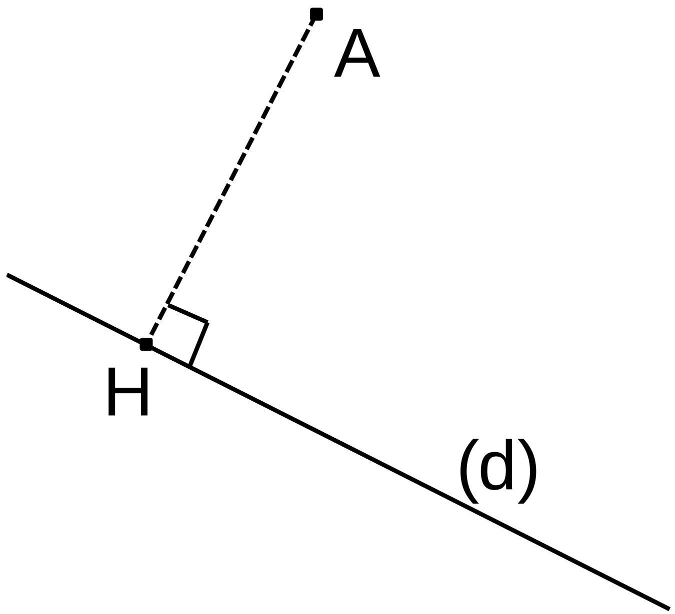
Droites remarquables du triangle

Hauteurs	Médianes	Médiatrices	Bissectrices
Dans un triangle ABC, la **hauteur issue de A** est la droite qui passe par A et est perpendiculaire au support du côté opposé.	Dans un triangle ABC, la **médiane issue de A** est la droite qui passe par A et par le milieu du côté opposé.	La **médiatrice d'un segment** est la droite qui passe par le milieu du segment et est perpendiculaire au support du segment.	La **bissectrice d'un angle** est la demi-droite issue du sommet de l'angle qui partage l'angle en deux parties égales.
Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.	Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle.	Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre du cercle circonscrit au triangle.	Les bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre du cercle inscrit au triangle.
			

<u>Définition</u>

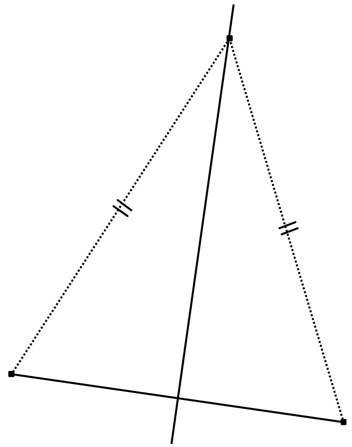
Soit (d) une droite et A un point n'appartenant pas à (d).

La <u>distance</u> entre la droite (d) et le point A est la longueur du segment [AH] où H est le point de (d) tel que (AH) $\perp$ (d).



Propriétés admises

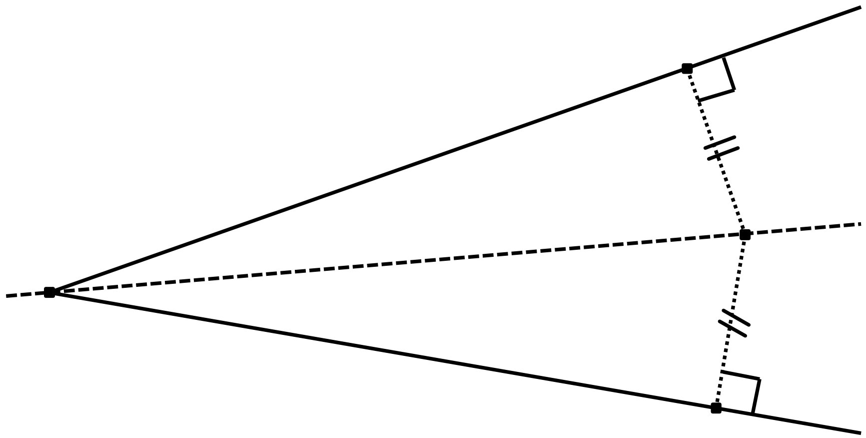
1 Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.



2 Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités du segment.

Propriétés admises

1 Si un point est équidistant des demi-droites formant un angle, alors il est sur la bissectrice de cet angle.



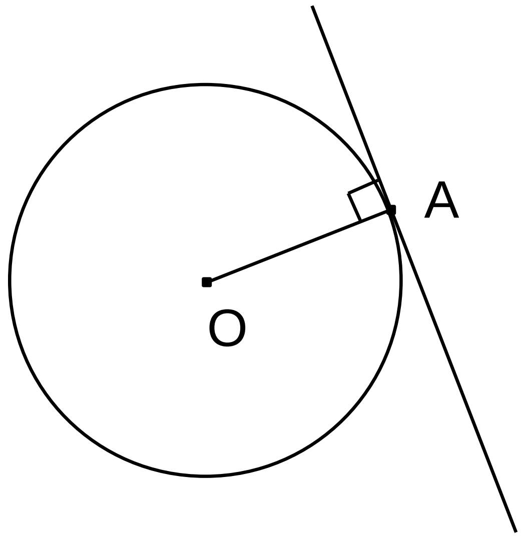
2 Si un point est sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des demi-droites formant cet angle.

Définition

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point du cercle.

On dit que la droite (d) est la tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point A si :

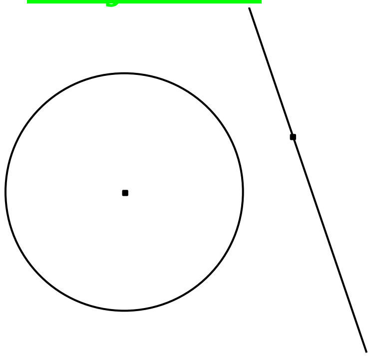
$$\begin{cases} A \in (d) \\ (OA) \perp (d) \end{cases}$$



Propriété admise

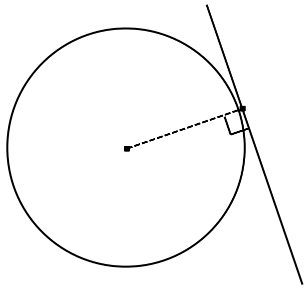
Un cercle et une droite peuvent être :

disjoints



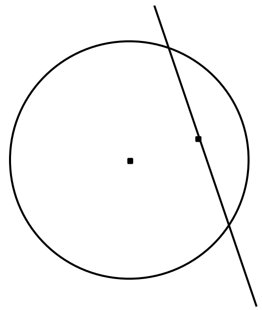
Ils n’ont aucun point d’intersection.

tangents



Ils ont un seul point d’intersection.

sécants



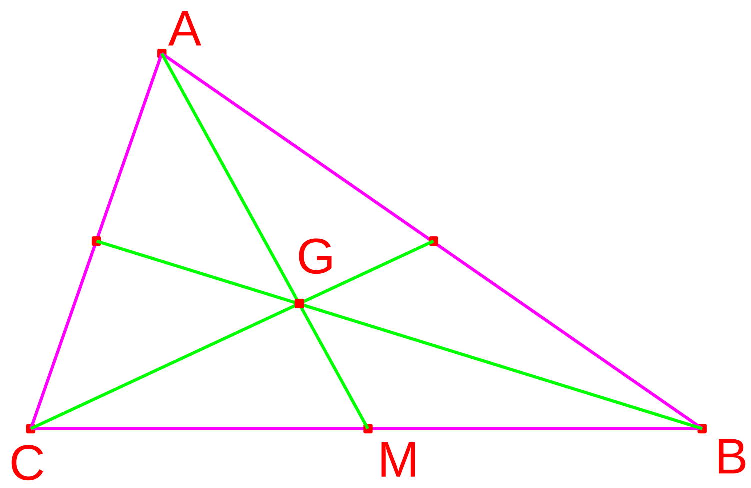
Ils ont deux points d’intersections.

Propriété

Soit ABC un triangle.

Soit G le centre de gravite du triangle et M le pied de la médiane issue de A.

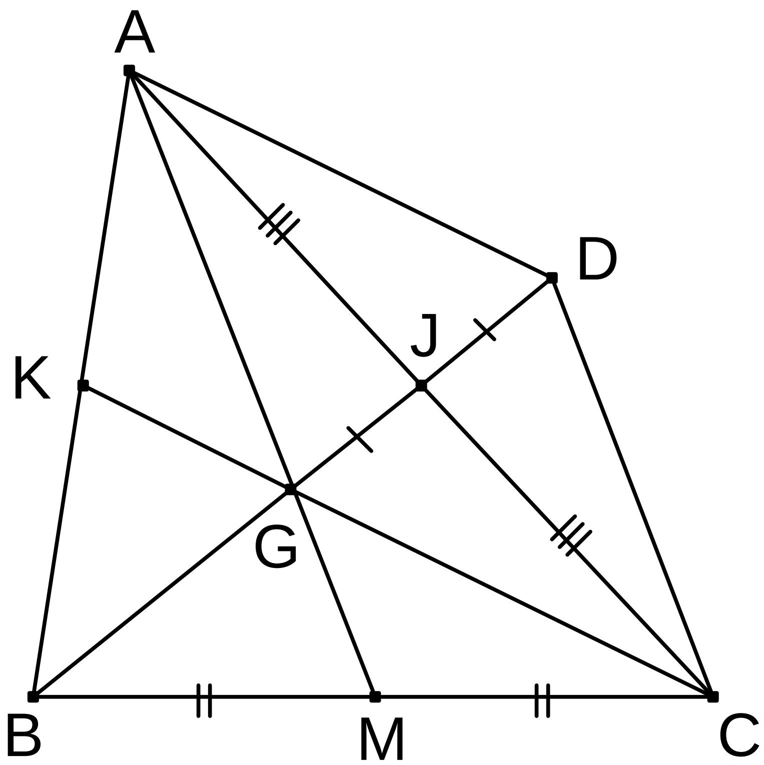
alors $AG = \dfrac{2}{3}\ AM$



Démonstration

Soit K et J les milieux des côtés [AB] et [AC]. Les médianes (AM), (CK) et (BJ) se coupent en G.

Soit D le symétrique de G par rapport à J.



Comme D est le symétrique de G par rapport à J, d'après la définition de la symétrie centrale, alors J est le milieu de [DG].

Dans le quadrilatère ADCG, comme les diagonales [DG] et [AC] se coupent en leur milieu, alors ADCG est un parallélogramme.

Comme ADCG est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur, donc AG = DC et (AG)//(CD) d'où (GM)//(CD).

Dans le triangle BCD, comme M est le milieu de [GM] et comme (GM)//(CD), d'après la propriété réciproque de la droite des milieux, alors G est le milieu de [BD].

Dans le triangle BCD, comme G et M sont les milieux de [BD] et [BC], d'après la propriété complémentaire de la droite des milieux, alors GM = CD÷2.

Comme AG = DC et GM = CD÷2 alors GM = AG÷2 ou AG = 2×GM.

Comme G $\in$ [AM], alors AM = AG + GM = 2×GM + GM = 3×GM.

Comme AG = 2×GM et AM = 3×GM alors $AG = \frac{2}{3}\ AM$